МОДЕЛЬ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОГО РЫНОЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БЕЗ ОБМЕНА ТРУДОВЫМИ РЕСУРСАМИ[1]

MODELING THE INTER-REGIONAL MARKET ACTING INDEPENDENTLY OF THE LABOR RESOURCES INTERCHANGE

Ю. Н. ГАВРИЛЕЦ, Ю. П. ОФМАН,

Москва, ЦЭМИ - РАН

Аннотация: *Данная работа продолжает исследование характеристик экономического равновесия в простейших математических моделях, в которых в процессе рыночного функционирования наряду с изменением потребительского спроса могут меняться как интенсивности трудовой деятельности, так и сами численности занятого населения.*

Abstract: *This paper is the extension of exploring the characteristics of economic equilibrium at the simple mathematical models in which during the process of market functioning two variables can be changed: intensity of working activity and number of employed citizens, parallel to the changes in customers' demand.*

JEL Classification: *C 62*;
Original scientific paper; Recived: September 23, 2009

Данная работа продолжает исследование характеристик экономического равновесия в простейших математических моделях, в которых в процессе рыночного функционирования наряду с изменением потребительского спроса могут меняться как интенсивности трудовой деятельности, так и сами численности занятого населения. В работах [2-3] исследован случай, когда при допустимости переходов из одной группы в другую общее число «рабочих мест» было ограничено величиной N так, что в равновесии должно выполняться условие: $\sum N_k = N$, где индекс k обозначает номер группы производителей -потребителей.

В работе [4] исследовался случай двух кластеров, когда вместо одного ограничения имелось два ограничения для разных групп.

В данной статье мы отказываемся от общих ограничений, оставляя возможности формирования численности занятых для каждой группы отдельно. Другими словами, считается, что в рыночном процессе каждая группа выходит на свой уровень занятости, хотя в текущий момент времени равновесие может нарушаться. При этом равновесие по продукту формируется общим рынком.

Основным элементом модели являются «участники»- представители некоторой однородной группы, внутри которой участники не различаются. В результате рыночного поведения участников каждая группа производит и потребляет какое-то количество благ, а также часть заработанных денежных средств отчисляет на «общественные нужды», налоги, сбережения и т.п. В модели эту величину называем «общественной нагрузкой», она задается экзогенно и должна быть произведена группами и покрыта денежными средствами из заработка групп. В качестве групп можно рассматривать регионы, «участниками» которых является экономически активное население (см.[2-3]).

Предполагая рациональность в экономическом поведении всего региона (группы), мы приписываем ее же занятому населению. Ясно, что все эти предположения носят довольно условный характер, но они могут быть в определенном смысле верифицированы.

Конкретно же гипотеза рациональности звучит так: если отчисления группы (региона) фиксированы (это налоги, сбережения, трансферты и т.д.), то рассматривая затраты труда и уровень потребления как неизвестные величины, можно считать, что соотношение между ними определяются рационально, например, так, что максимизируется некоторая целевая функция. В результате можно по наблюдениям оценивать параметры простейших целевых функций.

[1] Исследование проведено при поддержке РФФИ, грант № 07-06-00203.

Принятые предположения и сама модель, конечно, не могут считаться абсолютно безоговорочными. Однако они, как и большая часть экономико-математических моделей отражают определённую сторону действительности, тот или иной ее аспект. Каждая же такая модель являет собой некоторый шаг в сторону понимания реальности; последовательность этих шагов (и их параллельное взаимодействие) должно обеспечить приближение к той самой истине, которую полностью ни одна конкретная модель никогда не сможет выразить.

1. Рассмотрим сначала модель поведения одной однородной группы «производители – потребители» в рыночных условиях.

Имеется N «рабочих мест» (фиксированный спрос на труд), которые могут быть заняты индивидами, проживающими в этом месте (например, в некотором регионе) и имеющими известные профессионально-квалификационные характеристики. Их поведение на рынке заключается в трудовой деятельности, приводящей к выпуску продукта, а также в потреблении того же продукта на рынке.
Приняты следующие обозначения:

l – интенсивность труда отдельного участника;
T – предельная интенсивность труда отдельного участника;
x - объем потребления отдельного участника;
a – производительность труда при единичной интенсивности труда;
$a \cdot l$ – выпуск продукции отдельным участником;
X^0 - минимальное количество продукта, которую обязана произвести группа;
λ - некоторый строго положительный параметр, устанавливающий связь между доходом индивида и численности его группы.

Предполагается, что выполнено соотношение $N \cdot a \cdot T > X^0$ (1)
Балансовое соотношение имеет вид: $N \cdot a \cdot l - N \cdot x \geq X^0, \quad l, x \geq 0$ (2)

В условиях рынка поведение членов группы зависит от цены p и денежных отчислений («налога») q, которые определяют бюджетное ограничение для каждой группы:

$$p \cdot x = p \cdot a \cdot l - q \tag{3}$$

Функция полезности участника имеет вид: $U(x,l) = \ln x + b \cdot \ln(T - l)$ (4)
где b – некоторый коэффициент индивидуального соизмерения полезностей труда и потребления. При бюджетном ограничении (3) оптимальные величины x и l, максимизирующие функцию (4), легко определить:

$$x = \frac{aT - \frac{q}{p}}{1+b}, \qquad l = \frac{aT + b\frac{q}{p}}{a(1+b)} \tag{5}$$

Будем считать, что в равновесии группа должна произвести продукт объема X^0 и обеспечить собственное потребление объема x. Балансовое соотношение имеет вид: $N(al - x) = X^0$
где N – численность занятых (и потребляющих продукт) членов группы. Определим локальное равновесие как такой набор x^*, l^*, p^*, q^*, при котором выполняется условие:

$$\begin{aligned} & N \cdot (a \cdot l^* - x^*) = X^0 \\ & N = \frac{\lambda}{p^* \cdot x^*} \\ & U(x^*, l^*) \geq U(x,l) \\ & \text{ïðè} \\ & p^* \cdot x^* = p^* \cdot al^* - q^* \end{aligned} \tag{6}$$

Утверждение 1. При заданных параметрах X^0, a, N, b, T, λ существует единственное равновесие, определяемое ценой p* и налогом q*:

$$p^* = \frac{\lambda \cdot (1+b)}{a \cdot T \cdot N - X^0},$$

$$q^* = \frac{p^* \cdot X^0}{N}.$$

Заметим, что в равновесии

$$\frac{a \cdot T \cdot p^* - q^*}{1+b} = p^* \cdot x^* = \frac{\lambda}{N}\ ,\qquad \text{откуда:}$$

$$q^* = a \cdot T \cdot p^* - \frac{\lambda \cdot (1+b)}{N} \tag{7}$$

Эти формулы непосредственно следуют из соотношений равновесия.
Заметим также, что равновесные x* и l* максимизируют функцию U(l,x) при ограничении (2).

2. Рассмотрим теперь случай m (>1) групп, поведение которых описывается аналогичным образом, но которые теперь связаны общим рынком производства и потребления продукции. Переменным и параметрам каждой группы присваиваем индекс к=1,2 … m

Определим межгрупповое (или межрайонное) общее равновесие как совокупность переменных состояния системы {lk*, x_k *} и ценовых параметров 0<p*, q1*, q2*, … qn*, которые удовлетворяют «натуральным» условиям:

Баланс

∑Nk ⋅ (ak ⋅ lk*-xk*)= X^0 (8a)

Гиперболическое распределение по доходу:

$$N_k = \frac{\lambda_k}{p * x_k} \tag{8b}$$

Максимизация полезности участников

Uk(xk*,lk*)≥ Uk(xk,lk) для всех xk, lk, таких что (8c)

p*⋅ xk ≤ p*⋅ ak ⋅ lk – qk*

Имеет место следующая

Теорема 1:

При выполнении условия

∑ak ⋅ Nk ⋅ Tk> X^0, Uk(xk,lk)=ln⋅ xk +bk ⋅ ln(Tk–lk)

существует единственное равновесие, определяемое формулами:

$$p^* = \frac{\sum \lambda_k \cdot (1+b_k)}{\sum (a_k \cdot T_k \cdot N_k - X^0)} \qquad q_k^* = a_k \cdot T_k \cdot p^* - \frac{\lambda \cdot (1+b)}{N_k} \tag{9}$$

Выражения для l_k^* и $\cdot x_k^*$ совпадают с формулами для переменных локального равновесия.

Доказательство:

Из бюджетного ограничения для k-го участника равновесия следует, что

$$a_k \cdot l_k - x_k = \frac{q_k^*}{p_k^*}$$

Подставляя это выражение в балансовое равенство, получим

∑Nk ⋅ qk*= X^0 ⋅ p*

Так как численности Nk в равновесии распределены по зарплате гиперболически, то мы имеем

$$N_k = \frac{\lambda_k}{p * \cdot x_k}\ ,\qquad \text{откуда}$$

$$q_k^* = a_k \cdot T_k \cdot p^* - \frac{\lambda_k \cdot (1+b_k)}{N_k}$$

Подставляя теперь в балансовое соотношение для равновесия

∑Nk ⋅ qk*= X^0 ⋅ p*

вместо qk* его выражение, получим

$$p* = \frac{\sum \lambda_k \cdot (1+b_k)}{\sum a_k \cdot N_k \cdot T_k - X^0}$$

Все показатели равновесия определяются однозначно, значит, равновесие единственно.

Следствие 1. Равновесные величины затрат труда l* и потребления x* максимизируют функцию общественного благосостояния W=∑ λk ⋅ Uk (x_k ,l_k) при балансовом соотношении (8a). Коэффициенты λk - те же, что были определены ранее. Действительно, из условия равенства нулю частных производных функции Лагранжа находим, что оптимальными являются величины

$$x_k^0 = \frac{\lambda_k}{N_k \cdot p_0} \qquad l_k^0 = T_k - \frac{\lambda_k \cdot b_k}{N_k \cdot p_0 \cdot a_k} \quad , \tag{10}$$

где ро – множитель Лагранжа.
Далее видим, что ро совпадает с р*, а оптимальные x^0k и l^0k – с равновесными значениями x^*k и lk*.

Следствие 2. Показатели и параметры общего равновесия образуют локальное равновесие для каждого k-го участника.

Следствие 3. Если все локальные равновесия имеют одни и те же цены $p*$, а сумма «нагрузок» $\sum X_k{}^0 = X^0$, то переменные x^*k и lk*.и ценовые параметры qk*, $p*$ суть общее равновесие.

3. Рассмотрим теперь модель поддержания локального равновесия (6) в процессе рыночного механизма корректировки цены и налога. Будем полагать, в каждый момент времени t цена р и "налог" q формируют не только потребительский спрос x(p,q) и готовность работать с интесивностью l(p,q), но и предложение труда в объёме текущей численности группы n(p,q), определяемой формулой (8b):

$$\mathrm{n(p,q)} = \frac{\lambda}{p \cdot x(p,q)} \,, \tag{8a}$$

где λ - некоторый строго положительный коэффициент, отражающий характер гиперболического распределения участников по их зарплате.

Как обычно, цены регулируются законом спроса-предложения:

$$\frac{dp}{dt} = \mu \cdot [X^0 - n(p,q) \cdot ((a \cdot l(p,q) - x(p,q))] = f(p,q)$$

Или:

$$\frac{dp}{dt} = \mu \cdot [X^0 - \frac{q}{p} \cdot n(p,q)] = \mu \cdot [X^0 - \frac{q}{p} \cdot \frac{\lambda \cdot (1+b)}{a \cdot T \cdot p - q}] = f(p,q) \tag{11}$$

Будем считать, что налог q также меняется в результате сопоставления его текущего значения с той величиной, которая должна была бы быть в условиях равновесия.

Уравнение для q имеет вид:

$$\frac{dq}{dt} = \nu \cdot [a \cdot T \cdot p - \frac{\lambda \cdot (1+b)}{N} - q] = g(p,q) \tag{12}$$

Величина налога меняется в зависимости от того, в какую сторону нарушается равновесное соотношение между p и q формулы (7)

Если величина q меньше необходимого значения при данном р, то оно должна возрастать и наоборот. Заметим, что стационарное состояние системы (8) совпадает с локальным равновесием (6).

Легко видеть, что стационарное решение дифференциальных уравнений совпадает с равновесными значениями p(t)=p*, q(t)=q*.

Докажем следующую теорему об устойчивости локального равновесия.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием устойчивости равновесия (стационарного состояния системы) является выполнение неравенства:

$$\frac{\nu}{\mu} > \frac{2a \cdot T \cdot N \cdot X^0 - (X^0)^2}{\lambda \cdot (1+b)} \tag{13}$$

Доказательство:

Найдем частные производные по p и q правых частей дифференциальных уравнений (8a, 8b) в точке равновесия. Учитывая, что n=N, а $a \cdot T \cdot p^* - q^* = \lambda \cdot (1+b)/n$
получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{2a \cdot T \cdot N \cdot X^0 - (X^0)^2}{\lambda \cdot (1+b)}$$

Вычислим производную по q:

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{-a \cdot T \cdot N^2}{\lambda \cdot (1+b)}$$

Частные производные правой части второго уравнения по p, q – суть νaT, $-\nu$.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \mu\cdot\dfrac{2a\cdot T\cdot N\cdot X^0-(X^0)^2}{\lambda\cdot(1+b)}-\tau & -\mu\dfrac{a\cdot T\cdot N^2}{\lambda\cdot(1+b)} \\ \nu\cdot a\cdot T & -\nu-\tau \end{vmatrix}=0$$

или:

$$\tau^2+\tau\cdot[\nu-\mu\cdot\frac{2a\cdot T\cdot N\cdot X^0-(X^0)^2}{\lambda\cdot(1+b)}]+\frac{\mu\cdot\nu\cdot(a\cdot T\cdot N)^2}{\lambda\cdot(1+b)}=0 \qquad (14)$$

Так как свободный член этого уравнения всегда положителен, то остается требовать положительности коэффициента при τ, что и требовалось доказать. Рассмотрим зависимость устойчивости от величины $X^0>0$. Коэффициент при τ будет положительным, если будет положительной величина

$$y(X^0)=X^{02}-2a\cdot N\cdot T\cdot X^0+\frac{\nu}{\mu}\cdot\frac{\lambda\cdot(1+b)}{N} \qquad (15)$$

Так как минимум $y(X^0)$ достигается в точке aNT, а $y(0)=\dfrac{\nu}{\mu}\cdot\dfrac{\lambda(1+b)}{N}>0$, то величина $y(X^0)$ будет строго положительна при значении X^0, меньше чем величина меньшего корня уравнения $y(X^0)=0$:

$$X^0<a\cdot N\cdot T-\sqrt{(a\cdot N\cdot T)^2-\frac{\nu}{\mu}\cdot\lambda\cdot(1+b)}$$

При комплексных значениях корней устойчивость сохраняется, так как в этом случае $y(X^0)>0$.

4. Устойчивость общего равновесия. Рассмотрим теперь процесс поддержания общего равновесия рыночным механизмом, аналогичным системе (8).

$$\frac{dp}{dt}=\mu\cdot\left(x^0-\sum n_n\cdot\frac{q_n}{p}\right)=F(p,q_1,...,q_m), \qquad (16)$$

$$\frac{dq_k}{dt}=\nu\cdot\left(a_nT_np-\frac{\lambda_n\cdot(1+b_n)}{N_n}-q_n\right)=G_k(p,q_1,...,q_m), \qquad (17)$$

где $n_n=\dfrac{\lambda_n\cdot(1+b_n)}{a_k\cdot T_k\cdot p-q}$; (18)

Для составления характеристического уравнения системы продифференцируем функции F и G_k по всем переменным.

$$\frac{dF}{dp}=-\mu\cdot\frac{d}{dp}(\sum_k\frac{q_k}{p}\cdot\frac{\lambda_k\cdot(1+b_k)}{a_k\cdot T_k\cdot p-q_k})=-\mu\cdot(\sum_k\left(-\frac{q_k}{p^2}\right)\cdot N_k+\frac{q_k}{p}\cdot\frac{d}{dp}\frac{\lambda_k\cdot(1+b_k)}{a_k\cdot T_k\cdot p-q_k})=$$

$$=\mu\cdot\sum_k\frac{q_k^*\cdot N_k}{p^{*2}}+\mu\frac{1}{p^*}\cdot\sum_k\frac{q_k^*\cdot N_k\cdot a_k\cdot T_k\cdot(1+b_k)\cdot\lambda_k}{\lambda_k\cdot(1+b_k)};$$

Так как $q_k\cdot N_k=a_k\cdot T_k\cdot p\cdot N_k-\lambda_k\cdot(1+b_k)$, то мы имеем :

$$\frac{df}{dp}=\mu\cdot\frac{X^0}{p^*}+\mu\cdot\frac{1}{p^*}\cdot\sum_k\frac{a_k\cdot N_k\cdot T_k\cdot(a_k\cdot N_k\cdot T_k\cdot p-\lambda_k\cdot(1+b_k))}{\lambda_k\cdot(1+b_k)}=$$

$$=\mu\cdot\frac{X^0}{p^*}+\mu\cdot\sum_k\frac{(a_k\cdot N_k\cdot T_k)^2}{\lambda_k\cdot(1+b_k)}-\frac{\mu}{p^*}\cdot\sum_k a_k\cdot N_k\cdot T_k=$$

$$=\frac{\mu}{p^*}\cdot\left[X^0-\sum_k a_k\cdot N_k\cdot T_k\right]+\mu\cdot\sum_k\frac{(a_k\cdot N_k\cdot T_k)^2}{\lambda_k\cdot(1+b_k)}=$$

$$=-\mu\cdot\frac{\left(\sum_k a_k\cdot N_k\cdot T_k-X^0\right)^2}{\sum_k\lambda_k\cdot(1+b_k)}+\mu\cdot\sum_k\frac{(a_k\cdot N_k\cdot T_k)^2}{\lambda_k\cdot(1+b_k)}$$

Находим также, что

$$\frac{dF}{dq_k} = -\mu \cdot \frac{a_k \cdot T_k \cdot N^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)}; \tag{19}$$

Получим ещё:

$$\frac{dG_k}{dp} = \nu \cdot a_k \cdot T_{k;}; \quad \frac{dG_k}{dq_k} = -\tau; \tag{20}$$

Характеристическое уравнение имеет вид :

$$\begin{vmatrix} \mu \cdot \left(\sum_k \frac{(a_k N_k T_k)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} - \frac{(\sum_k a_k \cdot T_k \cdot N_k - X^0)^2}{\sum_k \lambda_k \cdot (1+b_k)} \right) - \tau & -\mu \cdot \sum_k \frac{(a_k \cdot T_k \cdot N_k)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} & \dots & -\mu \cdot \Sigma \\ \nu a_1 T_1 & -\nu - \tau & 0 \quad \dots & 0 \\ \dots & \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \quad \dots \quad \dots & \dots \\ \nu a_k T_k & 0 & 0 \quad \dots & -\nu - \tau \end{vmatrix} = 0 \tag{21}$$

Нетрудно убедиться ,что стационарное решение этой системы совпадает с равновесием (13-16). Имеет место следующая

Теорема 3.

Необходимым и достаточным условием устойчивости рыночного равновесия (13-16) является выполнение неравенста

$$\frac{(\sum_k a_k \cdot N_k \cdot T_k - X^0)^2}{\sum_k \lambda_k \cdot (1+b_k)} - \sum_k \frac{(a_k \cdot N_k \cdot T_k)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} + \frac{\nu}{\mu} > 0 \tag{22}$$

Доказательство:

Разложив определитель характеристического уравнения по элементам первой строки, мы получим многочлен степени m:

$(-\tau - \nu)^{m-2} \cdot R(\tau)$, где

$$R(\tau) = \tau^2 + \left[\nu + \mu \cdot \left(\frac{(\sum_k a_k \cdot N_k \cdot T_k - X^0)^2}{\sum_k \lambda_k \cdot (1+b_k)} - \sum_k \frac{(a_k \cdot N_k \cdot T_k)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} \right) \right] \cdot \tau + \frac{(\sum_k a_k \cdot N_k \cdot T_k - X^0)^2}{\sum_k \lambda_k \cdot (1+b_k)};$$

Так как m-2 корня этого многочлена имеют отрицательные значения, равные -ν , то устойчивость всей системы определяется уравнением R(τ) = 0. Для того, чтобы корни или действительные части корней многочлена R(τ) были отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при τ был положительным, что и доказывает теорему.

Рассмотрим, при каких значениях «общей нагрузки» X^0 равновесие будет устойчивым. Очевидно, для этого парабола относительно данного параметра, определяемая равеством нулю коэффициента при τ в первой степени, дожна лежать выше оси абсцисс:

$$y(X^0) = (\sum_k a_k \cdot N_k \cdot T_k - X^0)^2 - \sum_k \frac{(a_k \cdot N_k \cdot T_k)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} \cdot \sum_k \lambda_k \cdot (1+b_k) + \frac{\nu}{\mu} \cdot \sum_k \lambda_k \cdot (1+b_k) \geq 0$$

Видим, что минимум y(X^0) достигается при $X^0 = \sum_k a_k N_k T_k$. Если

$\frac{\nu}{\mu} - \sum_k \frac{(a_k \cdot N_k \cdot T_k)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} > 0$, то y будет положительным при любом X^0. В противном случае для положите-льности параболы необходимо выполнение неравенства:

$$X^0 < \sum_k a_k \cdot N_k \cdot T_k - \sqrt{\sum_k \frac{(a_k \cdot N_k \cdot T_k)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} \cdot \sum_k \lambda_k \cdot (1+b_k) - \frac{\nu}{\mu} \cdot \sum_k \lambda_k \cdot (1+b_k)}.$$

5. Анализ условий устойчивости локальных и общего равновесий.

Как видно из условий устойчивости покального (9) и общего (21) равновесий, соответствующие неравенства выполняются, в частности, в зависимости от скоростей изменения ценовых параметров p, q. Устойчивость одного из равновесий не обяэательно означает устойчивость другого, в то время как Следствия 1-2 Теорем о равновесии указывают на тесную связь между существованием обоих видов равновесий. Однако можно выявить определённую связь и между устойчивостями этих равновесий. Оказывается справедливой следующая теорема о достаточных условиях устойчивости общего равновесия.

Теорема 4. Если все локальные равновесия с pk*. qk* и суммой «нагрузок» $\sum_k X_k{}^0 = X^0$ устойчивы, то общее равновесие будет устойчиво, если для «*скоростей*» изменения ценовых параметров выполняется следующее неравенство :

$$\sum_k \nu_k / \mu_k < \nu / \mu \cdot \qquad (23)$$

Доказательство.

Если k-е локальное равновесие устойчиво, то согласно Теореме 2 должно выполняться неравенство $\frac{\nu_k}{\mu_k} \geq \frac{2a_k \cdot T_k \cdot N_k \cdot X_k{}^0 - (X_k{}^0)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)}$, которое можно переписать в виде

$$\frac{(a_k \cdot N_k \cdot T_k - X_k{}^0)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} - \frac{(a_k \cdot N_k \cdot T_k)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} + \frac{\nu_k}{\mu_k} > 0$$

или $$\frac{a_k \cdot N_k \cdot T_k - X_k{}^0}{p^*} - \frac{(a_k \cdot N_k \cdot T_k)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} + \frac{\nu_k}{\mu_k} > 0 \cdot$$

Здесь мы учитываем тот факт, что все $p_k{}^* = p^*$.

Суммируя далее по k все эти неравенства и снова заменяя p^* его выражением, мы получим:

$$\frac{(\sum_k a_k \cdot N_k \cdot T_k - X^0)^2}{\sum_k \lambda_k \cdot (1+b_k)} - \sum_k \frac{(a_k \cdot N_k \cdot T_k)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} + \sum \frac{\nu_k}{\mu_k} > 0 \cdot \qquad (24)$$

А так как ν / μ больше последнего слагаемого по условию теоремы, то подставляя эту дробь вместо суммы, мы только усилим неравенство и получим условие устойчивости общего равновесия. Теорема доказана.

Из устойчивости локальных равновесий совсем необязательно следует устойчивость общего равновесия. Ниже будет приведен пример такой ситуации даже при одинаковых скоростях изменения рынка у локальных равновесий. При одинаковых скоростях изменения всех рынков из отсутствия устойчивости хотя бы одного локального равновесия следует неустойчивость и общего равновесия. Справедливость этого представляющегося естественным факта вытекает из следующей теоремы.

Теорема 5. Если общее равновесие устойчиво, то соответствующие ему рынки локальных равновесий будут тоже устойчивыми.

Доказательство.

Пусть общее равновесие устойчиво. Как мы видели ранее, ему соответствуют локальные равновесия с теми же $p^*, q_k{}^*$. Пусть изменения рынков происходят с теми же скоростями, что и для общего рынка, а именно – ν, μ. Перепишем условие устойчивости общего равновесия – неравенство (22) – в следующем виде:

$$\frac{\nu}{\mu} > \sum_k \frac{(a_k \cdot N_k \cdot T_k)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} - \frac{(\sum_k a_k \cdot N_k \cdot T_k - \sum_k X_k{}^0)^2}{\sum_k \lambda_k \cdot (1+b_k)}$$ или (вводя равновесную цену):

$$\frac{\nu}{\mu} > \sum_k (\frac{(a_k \cdot N_k \cdot T_k)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} - \frac{\sum_k a_k \cdot N_k \cdot T_k - \sum_k X_k{}^0}{p*})$$ или (учитывая, что цены равны: $p* = p_k* = \frac{\lambda_k \cdot (1+b_k)}{a_k \cdot N_k \cdot T_k - X_k{}^0}$):

$$\frac{\nu}{\mu} > \sum_k (\frac{(a_k \cdot N_k \cdot T_k)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)} - \sum_k \frac{(a_k \cdot N_k \cdot T_k - X_k{}^0)^2}{\lambda_k \cdot (1+b_k)})$$ или

$$\frac{\nu}{\mu} > \sum_k \frac{(2 \cdot a_k \cdot N_k \cdot T_k - X_k{}^0) \cdot X_k{}^0}{\lambda_k \cdot (1+b_k)}.$$

Как легко видеть, все слагаемые под знаком суммы – положительны, поэтому оставив только одно, мы усилим неравенство и получим:

$$\frac{\nu}{\mu} > \frac{(2 \cdot a_k \cdot N_k \cdot T_k - X_k{}^0) \cdot X_k{}^0}{\lambda_k \cdot (1+b_k)},$$

что означает локальную устойчивость. Теорема доказана.

Пример.

Для расчёта характеристик равновесия воспользуемся данными об экономическом положении Федеральных округов России в 2003 году по Системе национальных счетов РФ.

Исходные данные:

ВРП (млн)	ЗАНЯТЫЕ (тыс.)	ДЕНЕЖНОЕ ПОТРЕБЛЕНИЕ (млн)	ЗПЛ (млн.)	БЕЗРАБ (тыс).
$y := \begin{pmatrix} 3577142.5 \\ 1091026.5 \\ 836254.9 \\ 1807987.0 \\ 1659322.1 \\ 1209596.7 \\ 561093.6 \end{pmatrix}$	$N := \begin{pmatrix} 18642 \\ 6886 \\ 8617 \\ 14341 \\ 5983 \\ 8728 \\ 3235 \end{pmatrix}$	$X := \begin{pmatrix} 27366815.2 \\ 694872.7 \\ 765194.3 \\ 1243523.4 \\ 651880.2 \\ 901946.0 \\ 371633.5 \end{pmatrix}$	$S := \begin{pmatrix} 1242062.1 \\ 512609.8 \\ 336259.2 \\ 737089.2 \\ 590114.5 \\ 551898.5 \\ 285229.1 \end{pmatrix}$	$V := \begin{pmatrix} 919 \\ 444 \\ 1302 \\ 1217 \\ 482 \\ 1002 \\ 309 \end{pmatrix}$

Будем считать, что наблюдаемое положение округов России образует равновесие в смысле рассмотренных выше моделей. Кроме того принимаем следующие допущения:

- Группы (k=1,2,…7) – округа, участники – «занятые».
- y – производимый продукт (ВРП.
- X – потребление «домашних хозяйств» относим к «занятым».
- Интенсивность труда измеряем его оплатой (S). Для одного занятого интенсивность равна $l_k = S_k / N_k$. Производительность труда при единичной интенсивности $a_k = y_k / S_k$.
- Максимальная интенсивность в округе – это оплата труда, когда включены все безработные (V) с той же зарплатой; индивидуальный «трудовой потенциал» равен $t_k = S_k(1 + V_k / N_k)$.
- «Нагрузка» на округ: $X^0{}_k = y_k - X_k$, нагрузка н одного занятого - $(y_k - X_k)/N_k$.

Так как общее равновесие *Парето-оптимально*, то существуют λ - коэффициенты, при которых достигается максимум функции общественного благосостояния W=$\sum_k (\lambda_k u_k)$ при выполнении балансового ограничения. Поэтому считая реализованное состояние равновесным, мы можем вычислить эти коэффициенты (с точностью до положительного множителя). При данных обозначениях согласно условиям Лагранжа (Следствие1, Теорема 2) должно выполняться соотношение

$x_k^0 = \dfrac{\lambda_k}{N_k \cdot p_0}$, откуда непосредственно вытекают оценки как модельной цены равновесия p_0, так и коэффициентов λ_k. Положив сумму коэффициентов равной 1000, находим, что $p_0 = 0.136$, а $\lambda = (372, 95,105, 168, 88,122, 50)$.

Из условий максимизации функции полезности в локальном равновесии находим: b= (0.070 0.117 0.167 0.120 0.206 0.179 0.140).

Наконец, имея возможность сравнить величину изменения за год равновесной цены и равновесных денежных отчислений, можно для имеющихся данных остановиться на величинах скоростей : $\mu = 0.00001, \nu = 0,66$.

В результате цены локальных равновесий при полученных λ совпадают с ценой общего равновесия

$$p_k := \frac{\left[\lambda_k \cdot (1 + b_k)\right]}{a_k \cdot t_k \cdot L_k - X0_k} \qquad p = \begin{pmatrix} 0.136 \\ 0.136 \\ 0.136 \\ 0.136 \\ 0.136 \\ 0.136 \\ 0.135 \end{pmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} 6.162 \\ 7.795 \\ 1.044 \\ 5.42 \\ 22.888 \\ 4.919 \\ 7.98 \end{pmatrix}$$

Соответствующие значения критериев устойчивости локальных и общего равновесий оказываются нужных знаков, что означает полную устойчивость. Но если положить $\nu = 0,6$, то общее равновесие станет неустойчивым; устойчивость локальных равновесий сохранится.

Список использованной литературы

[1] Булгаков В.К., Булгаков О.В., Моделирование динамики обобщающих показателей развития региональных экономических систем России//Экономика и математические методы, 2006(1).

[2] Гаврилец Ю.Н., Модель равновесного функционирования экономики с переменной структурой населения//Экономика и математические методы. 1994. Т. 30. № 2.

[3] Гаврилец Ю.Н., Соизмерение интересов и ценовое регулирование экономики с переменной структурой населения (модельный анализ)//Экономика и математические методы. 1996. Т. 32. № 1.

[4] Гаврилец Ю.Н., Ананьева Р.И., Кластерная модель экономического равновесия с подвижной социальной структурой Труды Международной юбилейной сессиинаучного семинара «Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов». Москва, ЦЭМИ РАН, 2009.

[5] Гранберг А.Г., Суслов В.И., Коалиционный анализ многорегиональных систем: теория, методология, результаты анализа (СССР накануне распада). Научный доклад//Новосибирск – 1993.

[6] Гранберг А.Г., Суслов В.И., Суспицын С.А., Экономико-математические исследования многорегиональных систем//Регион: экономика и социология. 2008. Т. 2.

[7] Иодчин А.А., Эконометрическое моделирование межрегиональной конвергенции в России. Диссертация на соискание ученой степени кандидата экономических наук. – Москва, 2007.

[8] Никайдо Х., Выпуклые структуры и математическая экономика. – М: Мир, 1972.

[9] Lipshitz G., Raveh A. Socio-economic Differences among Localities: A New Method of Multivariate Analysis//Regional Studies, Vol. 32.8, 1998.

[10] Crizaky Dario. An Econometric Model for Development Level Assessment with an Application to Municipality Development Classification//Fifth International Conference on “Enterprise in Transition”, 2003.