КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОВРЕМЕННОГО ФОРМИРОВАНИЯ РЫНКА, СТРУКТУРЫ НАСЕЛЕНИЯ И ЕГО ПРЕДПОЧТЕНИЙ [1]

COMPUTER MODELING OF SIMULTANEOUS FORMATION MARCET, STRUCTURE OF POPULATION AND ITS PREFERENTIONS

Ю. Н. ГАВРИЛЕЦ (Yuriy Gavrilec),
Russian Academy of Sciences,
Central Economics and Matematics Institute (CEMI)

Abstract: *In the article the one-product model of market dynamic when alongside with changes of the prices, offers of work and a consumer demand there is a formation of social structure and utility functions of the population is offered. Computer calculations have allowed to show graphically trajectories to market equilibrium of all variables of model, and also to consider different ways of information influence on economic behaviour of groups.*
Key Words: *economic equilibrium, optimal economic behaviour, dynamics of market, stability, attitude, social struture, dynamics of utility functions, computer modelling.*

JEL clasification: C 60; C 80;
Original scientific paper; Recived: September 10, 2007

1. Введение

Функционирование современного общества сопровождается более или менее быстрой динамикой экономических характеристик рынка (цены, спрос, предложение и т.п.), изменением социальной структуры населения („домохозяйств“)– численностей трудовых и потребительских групп, а также предпочтений населения. Все эти процессы происходят во взаимосвязи, так что изменение одного их них может сопровождаться изменением и других. Безусловный интерес для теории и практики представляют состояния социально-экономической системы, которые описываются на языки экономико-математического моделирования, как *стационарные* или *равновесные*, и которые к тому же *устойчивы*, т.е. не реагируют на слабые внешние возмущения. В данной статье, предпринята попытка проанализировать с использованием компьютерных вычислений эти процессы в целом и в их взаимосвязи. В силу большой сложности такой реальной системы, как экономика, мы предельно упрощаем саму модель, ограничиваясь одним производимым и потребляемым продуктом, линейной производственной функцией и функциями полезности типа Кобба-Дугласа. Экономическая часть модели следует идеологии опубликованных ранее работ автора в [1-2], а встроенная сюда модель формирования предпочтений опирается на наши работы [3-6], являющиеся, в свою очередь, определенным откликом на классическую работу Н. Рашевского [7].

Последне время, особенно с 90-х годов прошлого века, большое распространение получило использование компьютерных моделей экономики, которые приобретают статус самостоятельного направления в экономических исследованиях. Естественно, эти модели предварительно должны быть описаны на языке математики. В работах В. Л. Макарова и его учеников активное применение компь-

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 07- 06- 00203

ютерных аналогов позволило анализировать различные варианты экономической политики (см. [10-12] и др.). В работах В. В. Лебедева (см. [13] и др.) компьютерные модели позволяют иллюстрировать и развивать содержательные аспекты экономического знания.

Математическая и основанная на ней компьютерная модели прежде всего должны опираться на более или менее адекватное отражение действительности, которое в рамках различных содержательных или теоретических представлений может описываться набором качественных и количественных показателей, получаемых с помощью самых различных измерительных процедур. Общеизвестны трудности получения статистически значимой информации в необходимом объёме. Математическая модель сложной системы всегда содержит обилие различных параметров, которые оцениваются либо статистически либо экспертно. Выявление влияния этих параметров на поведение системы является важнейшей задачей всякого исследования. К сожалению, чисто математический анализ построенных моделей часто оказывается мало эффективным именно из-за большого числа параметров модели. Использование компьютерного моделирования частично облегчает проблему, т.к. позволяет дополнять наши представления о реальности условной, „виртуальной" информацией. Поведение компьютерного аналога реальности можно изучать при разных сочетаниях значений параметров, при разных состояниях внешней среды. Тем самым исследователь как бы получает дополнительный эмпирический материал. Основной целью данной статьи является иллюстрация возможностей применения сравнительно простой техники (как математической так и компьютерной) для анализа экономических механизмов обеспечивающих поддержание стабильности социально-экономической системы.

2. Модель экономического равновесия с переменной социальной структурой

Ниже описывается, можно сказать, некий „*виртуальный мир*", который определенным образом отражает свойства реальности, хотя и не является ее адекватным отражением. Однако, вообще говоря, такими же «виртуальными моделями» являются и большинство известных экономико-математических моделей, так что с подобной виртуальностью приходится мириться. Рассматривается экономическая система, включающая в себя m типов активных участников, производящих и потребляющих один продукт. Приняты следующие обозначения

i (=1,2,…m) – номер социальной группы

ni–количество участников i-го типа;

ai – объем производимого продукта одним i-ым участником, работающим с единичной интенсивностью

li – интенсивность труда i-го участника;

xi – объем потребления участником из i-ой группы;

$x0$ – «внешняя нагрузка» (государственное потребление, инвестиции и прочее) при $x0 > 0$ и «внешний ресурс», запасы, импорт – при $x0 < 0$.

В результате основное балансовое соотношение производства и потребления имеет вид:

$$\sum(a_i l_i - x_i)\, ni = x0, \qquad (1)$$

При этом уровень достигаемой полезности социальных групп описывается функцией:

$$ui(xi, li) = ln(xi) + bi\,ln(Ti - li)\,, \qquad (2)$$

где

Ti – предельная интенсивность труда в i-ой группе;

bi – коэффициент, соизмеряющий полезность «свободного времени» Ti – li с полезностью потребления xi.

В работах [1-2] рассматривался рыночный процесс, когда поведение (потребительское и трудовое) каждой группы определялось, как решение задачи на максимум функции (2) при бюджетном ограничении:

$$pxi = aili - q, \qquad (3),$$

где p>0 имеет смысл цены, а q– некий трансферт, одинаковый для всех групп, положительный при а >0 („налог“) и отрицательный при а <0 (дотации)[2].

Как нетрудно убедиться, в этом случае оптимальное поведение групп (спрос х и интенсивность труда l) будут равны выражениям:

$$x_i = \frac{a_i T_i - \dfrac{q}{p}}{1+b_i}, \qquad l_i = \frac{a_i T_i + b_i \dfrac{q}{p}}{a_i(1+b_i)} \tag{4}$$

При этом предельная полезность дохода

$$\beta_i = \frac{1}{p x_i} = \frac{(1+b_i)}{(a_i T_i - \dfrac{q}{p})p} \tag{5}$$

Как было показано в [1], в этом случае социальная структура населения („домохозяйств“) определяется формулой

$$_i = \lambda_i \beta_i, \tag{6}$$

где λ_i- некий коэффициент, условно определяющий „социальную значимость“, поскольку он может быть весовым коэффициентом в утилитаристском варианте функции общественного благосостояния [1]. Так как предельная полезность падает с ростом дохода, а при равновесии в данной модели она является обратной величине к его доходу [1], то можно сказать, что формула (6) отражает гиперболический закон распределения населения по доходу при $\lambda_i = \lambda$. Изменение λ_i для некоторых групп означает деформацию и закона распределения.

Равновесие такой системы можно определить как набор: p^* , q^*, ni^*, xi^*, li, удовлетворяющий условиям

$$\sum ni^*(ai\, li^* - xi^*) = x0, \tag{7}$$
$$\sum ni^* = N, \tag{8}$$

когда равновесные значения ni^*, li^*, xi^* удовлетворяют соотношениям (4-6). При этом цена $p^* = \sum \dfrac{\lambda_i(1+b_i)}{a_i T_i N - x0}$, а трансферт $q^* = p^* x0/N$.

Динамика процесса поддержания рыночного равновесия в нашем случае описывается двумя дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d}{dt} p = \mu \times \left[x_0 - \sum_i n_i (a_i l_i - x_i) \right] \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt} q = \tau \times \left[N - \sum_i n_i \right], \tag{10}$$

где xi , li , ni являются функциями ценовых параметров p и q согласно формулам (4) - (6), а μ, τ характеризуют скорость реакции р и q в ответ на дисбалансы

Анализ устойчивости равновесия в данной модели проведен в [1] при неизменных функциях полезности u(x,l). Рассмотрим теперь возможность одновременного изменения предпочтений в процессе формирования рыночного равновесия. Приводимые примеры устойчивых или неустойчивых траекторий рынка, структуры населения и предпочтений – хотя и являются функциями времени, отражают однако динамику около равновесия *статической* социально-экономической системы. Они описывают процесс „нащупывания“, который в ряде случаев можно также считать процессом информационного обмена

[2] Одинаковые значения трансферта q обеспечивают оптимальность равновесия при равновесных численно-стях групп, задаваемые формулой (6).

3. Моделирование динамики установки

Изменение предпочтений– это изменение функции полезности или, как минимум, изменение ее параметров в данном классе функций. Но от каких „внешних“ факторов может зависеть значение того или иного параметра функции полезности? В работе [6] рассматривалось формирование функции полезности типа Кобба-Дугласа при постоянных ценах и доходах, как следствие изменений спроса под влиянием эффекта подражания и рекламы. Здесь мы рассмотрим изменение предпочтений в процессе всего рыночного функционирования, когда меняется спрос, предложение, цены и присутствует эффект подражания и реклама. Для этого введем понятие *экономической установки* представителя социальной группы, предпочтения которого представляются функциями полезности u(x,l)

В социологии и психологии под установкой (*attitude*) обычно понимается предрасположенность индивида к определённому виду поведения. Часто этим термином обозначается также субъеективное отношение индивида к чемуто или даже его оценка. Измерению установки посвящено довольно много работ; что касается моделирования её изменений, то их немного. Отметим лишь [8-9]. В нашем случае состояние индивида (отдельного домохожяйства, потребитепяпроизводителя) описывается двумя показателями– его трудовой интенсивностью и его потреблением– поэтому непосредственно осознается им некоторая связь между этими двумя показателями. Можно считать, что параметр T является характеристикой не предпочтения индивида, а его физиологических возможностей– поэтому он не меняется. В то же время параметр b соотносит „полезность досуга“ с „полезностью потребления“, поэтому именно его изменение будет выражать изменение „экономической установки“. Вообще говоря, в каждой ситуации (*l,x*) индивид ощущает не столько величину функции полезности, сколько готовность затратить или нет своё время на приобретение дополнительного количества благ. Другими словами, именно предельную норму компенсации труда потреблением индивид ощущает непосредственно. Величина эта

$$E(x,l) = - Ul \,/\, Ux\,, \qquad (11)$$

показывает, каким увеличением потребления можно без ущерба для индивида компенсировать увеличение интенсивности труда. Эту величину будем считать первым вариантом измерения экономической установки. Можно, повидимому, предполагать наличие и другой, более „грубой“, но более наглядной установки в виде непосредственно отношения

$$E(x,l) = x \,/\, l\,, \qquad (12)$$

показывающего среднюю величину потребления, приходящегося на единицу трудовой интенсивности. Какая из них определяет поведение людей в действительности– пока что нам не известно. Возможно, в разных ситуациях проявляются разные формы установки, но мы проанализируем на компьютерных моделях действия обоих вариантов.

В соответствии с идеологией наших работ [3-5] и других будем считать такую установку векторным полем, когда ее изменения в одной точке также означает одновременные изменения и во всех остальных. Простейшее уравнение динамики установки (в линейном случае) имеет вид:

$$\frac{d}{dt}E_i = A_i \times (\sum_{k=1}^{m} \delta_k \times E_k - \sigma_i \times E_i) + C_i \times (c_i - E_i) + D_i \times (d_i - E_i), \qquad (13)$$

где *di, ci* – „собственный“ и „внешний“ стандарты;
Ai, Ci ,Di – коэффициенты влияния отклонения от стандарта - на установку.
Будем считать, что коэффициенты *δk* представляют собой удельный вес k–ой группы во всей совокупности, а σi– некоторый коэффициент „собственной значимости“ (σi≥1), величина которого характеризует „сопротивляемость“ общественному мнению. Тогда∑*δk Ek* – средняя установка в обществе. В дальнейшем оставим влияние только внешнего стандарта, так как влияние внутреннего носит аналогичный характер. Именно линейные уравнение (13) мы и будем использовать в дальнейшем, не рассматриваяболее сложные нелинейные уравнения.

4. Установка как предельная норма компенсации труда потреблением

Для моделирования динамики экономической установки (11) необходимо уточнить содержательно и формально гипотезу о механизме изменения установки в конкретной ситуации. В условиях рыночных цен p и трансфертов q при рациональном поведении потребителя k всегда значение функции (11) будет равно величине *a*k при любых значениях b_k, как у данного индивида, так и у тех индивидов, состояние которых известны. Очевидно, можно считать, что конкретным индивидом i величина a_i сопоставляется не с величинами a_k ($n \neq i$) (которые ему не известны), а с тем значением нормы компенсации E_k , которая была бы у индивида i, если бы его потребление и затраты труда были бы такими, какие наблюдаются у индивида *к*. То есть величина a_i сравнивается с величиной квазиустановки:

$$\tilde{E}_{i,k} = \frac{b_i \times x_k}{T_i - l_k} \tag{14}$$

Согласно формуле (13) сравнение происходит с усреднением таких квазиустановок по численностям всех групп n1, n2,…, nm. В результате первое слагаемое правой части уравнения (9) примет вид:

$$A_i\left[\sum_{k\neq i}\frac{n_k}{N}\tilde{E}_k + \frac{n_i}{N}a_i - a_i\sigma_i\right],$$

где m- общее число групп, n_i- размер i-ой группы, N- общее количество населения, а σ_i - „коэффициент собственной значимости“, незначительное отличие которого от единицы означает уменьшение или увеличение роли собственного мнения по сравнению с мнением всех остальных. В итоге получаем дифференциальные уравнения:

$$\frac{dE_i}{dt} = A_i\left(\sum_{n\neq i}\frac{n_k}{N}\times\frac{b_i x_k}{T_i - l_k} + \frac{a_i(n_i - \sigma_i N)}{N}\right) + B_i(C_i - a_i),$$

которые добавляются к системе (9), (10), принимающей вид:

$$\frac{d}{dt}p = \mu\times\left[x0 - \frac{q}{p}\times\left(\lambda_1\times\frac{1+b_1}{a_1\times T_1\times p - q} + \lambda_2\times\frac{1+b_2}{a_2\times T_2\times p - q}\right)\right] \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}q = \tau\times\left[N - \left(\lambda_1\times\frac{1+b_1}{a_1\times T_1\times p - q} + \lambda_2\times\frac{1+b_2}{a_2\times T_2\times p - q}\right)\right] \tag{16}$$

Так как решение задачи оптимального поведения представителя к-ой группы в условиях цен *p* и трансферта *q* даётся формулами (4), о квазиустановка к-группы с точки зрения i-группы будет равна

$$\tilde{E}_k(p,q) = \frac{a_k(a_k T_k - \frac{q}{p})b_i}{a_n(T_i - T_k) + (a_n T_i - \frac{q}{p})b_k} \tag{17}$$

Учитывая численности групп, определяемые формулой (6), имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{b_i x_i}{T_i - l_i}\right) = A_i\left(\sum_{k\neq i}\frac{\lambda_k(1+b_n)}{a_n T_n p - q}\times\frac{b_i}{N}\times\frac{(a_n T_k - \frac{q}{p})a_n}{a_n(T_i - T_n) + b_k(a_k T_i - \frac{q}{p})} + \frac{a_i(n_i - \sigma_i N)}{N}\right)h_i + B_i(C_i - a_i)h_i$$ где

коэффициенты *hi* характеризуют скорость реакции установки на совокупное отклонение текущего значения от стандартов.

Уравнение для изменения параметра *bi* принимает вид:

$$\frac{d}{dt}b_i = A_i\times\frac{b_i h_i}{a_i}\left(\sum_{k\neq i}\frac{\lambda_k(1+b_n)}{a_n T_n p - q}\times\frac{b_i}{N}\times\frac{(a_n T_k - \frac{q}{p})a_n}{a_n(T_i - T_n) + b_k(a_k T_i - \frac{q}{p})} + \frac{a_i(n_i - \sigma_i N)}{N}\right) + B_i(C_i - a_i)\frac{b_i h_i}{a_i}$$

так как при оптимальном поведении групп выполняется равенство: $\frac{x_i}{T_i - l_i} = \frac{a_i}{b_i}$.

Рассмотрим теперь компьютерную реализацию этого варианта модели для случая двух различных социальных групп, когда общее количество населения должно быть равно N=15 какихто единиц, а „внешняя нагружка" на экономику x0 =10. Реакция переменных на отклонение от равновесия характеризуется следующими значениями:
μ=0.0078, τ=0.117, h1=0.002, h2=0.011 .

Остальные параметры модели задаются следующими числовыми значениями:

п а р а м е т р ы	*I группа*	*II группа*
производительность труда при единичной интенсивности (ai)	0.25	0.35
предельная величина интенсивности труда (Ti)	8	9
коэффициент подражания другим (Ai)	0.100	0.447
коэффициент противодействия подражанию (σi)	1	1
величина внешнего стандарта (ci)	4	5
коэффициент влияния внешнего стандарта (Bi)	0.8	0.28
коэффициент социальной важности группы (λi)	3	7

Видно, что внешний стандарт влияет на первую группу сильнее чем „общественное мнение", а для второй- наоборот. Стационарное состояние определяется из решения системы 4-х алгебраических уравнений:

$$x_0 - \frac{q}{p}\times\left(\lambda_1\times\frac{1+b_1}{a_1\times T_1\times p-q}+\lambda_2\times\frac{1+b_2}{a_2\times T_2\times p-q}\right)=0$$

$$N-\left(\lambda_1\times\frac{1+b_1}{a_1\times T_1\times p-q}+\lambda_2\times\frac{1+b_2}{a_2\times T_2\times p-q}\right)=0$$

$$\frac{a2\times(a2\times T2-\frac{q}{p})\times b1\times x}{(a2\times(T1-T2)+b2\times(a2\times T1-\frac{q}{p})\times y}\times\frac{\lambda_2\times(1+y)}{(a2\times T2\times p-q)\times N}+B1\times M-\left[B1+A1\times\left[\frac{N-1}{N}\times\frac{\lambda_1\times(1+x)}{(a1\times T1\times p-q)}\right]\right]\times a1=0$$

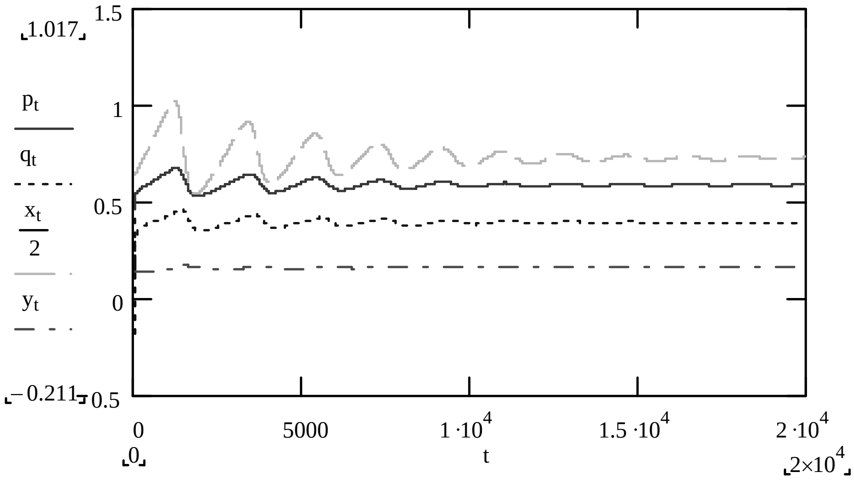
$$\frac{a1\times\left(a1\times T1-\frac{q}{p}\right)\times y}{\left[a1\times(T2-T1)+\left(a1\times T2-\frac{q}{p}\right)\times x\right]}\times\frac{\lambda_1\times(1+x)}{(a1\times T1\times p-q)\times N}+B2\times mm-\left[B2+A2\times\left[\frac{N-1}{N}\times\frac{\lambda_2\times(1+y)}{a2\times T2\times p-q}\right]\right]\times a2=0$$

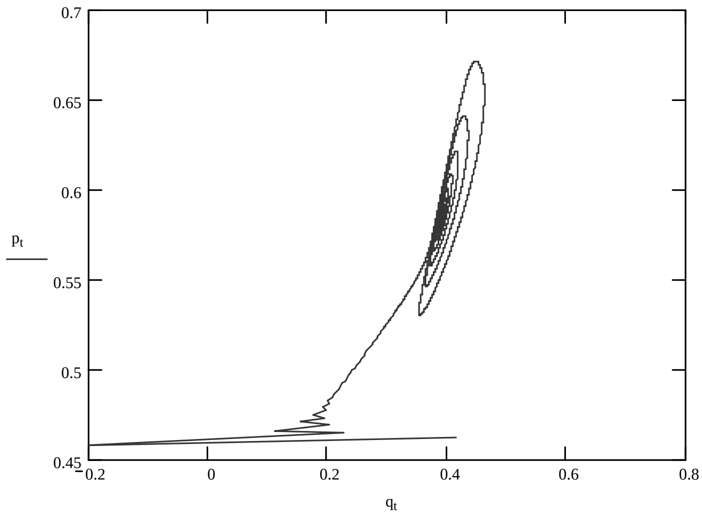
где буквами x, y обозначены коэффициенты b1 и b2. Решение равно величинам:
p*= 0.588 q*=0.392 b1*=1.469 b2*=0.159

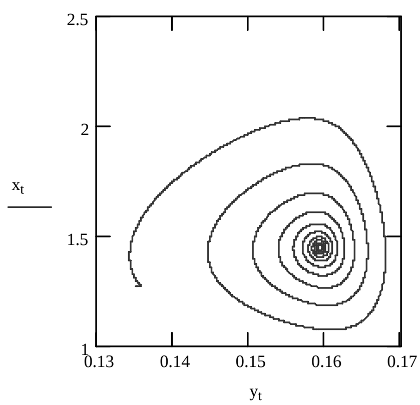
Корни характеристического уравнения матрицы частных производных в этой точке имеют значения (с учетом коэффициентов τ,μ):

(-5.988+6.052i, -5.988-6.052i, -0.066+0.567i, -0.066+0.567i).

Так как их действительные части отрицательны, стационарное решение должно быть устойчивым. Это факт иллюстрируется видом сходящихся траекторий – решений дифференциальных уравнений (рис.). На следующих рисунках хорошо видны взаимосвязи переменных в процессе рыночного функционирования.







Общий выпуск равен y*= 12.682. По формулам (4-6) находим остальные равновесные значения переменных.

Таблица стационарных значений

	Численность (n*1, n*2)	Ценность свободного времени (b*1, b*2)	Душевое потребление (x*1, x*2)	Труд (l*1, l*2)	Душевой доход (s*1, s*2)
I группа	9.445	1.469	0.54	4.827	0.318
II группа	5.555	0.159	2.142	8.026	1.26

5. Установка как потребление на единицу труда

Рассмотрим теперь второй случай, когда экономическая установка выражается отношением потребления к затратам труда: $E = x / l$.

Модель изменения такой установки в процессе рыночного функционирования имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x_i(p,q,b_i)}{l_i(p,q,b_i)}\right] = A_i \times \left[\sum_{k=1}^{m} \delta_k \times \frac{x_k(p,q,b_k)}{l_k(p,q,b_k)} - \sigma_i \times \frac{x_i(p,q,b_i)}{l_i(p,q,b_i)}\right] - C_i \times \left[c_i - \frac{x_i(p,q,b_i)}{l_i(p,q,b_i)}\right]$$

(в этом уравнении мы также отразили влияние только «внешнего стандарта» ci).

Коэффициенты δk , как и раньше, представляют собой удельный вес k–ой группы во всей совокупности, а σi – некоторый коэффициент «собственной значимости» ($\sigma i \geq 1$), величина которого характеризует «сопротивляемость» общественному мнению.

Доля каждой группы во всей совокупности из N домохозяйств будет равна:

$$\delta_i = \lambda_i \times \frac{(1+b_i)}{a_i \times T_i - \dfrac{q}{p}} \ .$$

Рациональное рыночное поведение означает, что xi , li описываются формулой (4). Тогда

$$E = \frac{a \times \left(a \times T - \dfrac{q}{p}\right)}{a \times T + b\dfrac{q}{p}}$$

Так как изменение установки E выражается только в изменении параметра b, то:

$$\frac{d}{dt}E = \frac{d}{db}E \times \frac{d}{dt}b$$

и для всей модели производная $\frac{d}{dt}b$ будет равна выражению

$$\left[\left[A_i \times \left[\sum_{k=1}^{m} \delta_k \times \frac{a_k \times \left(a_k \times T_k - \dfrac{q}{p}\right)}{a_k \times T_k + b_k \dfrac{q}{p}} - \sigma_i \times \frac{a_i \times \left(a_i \times T_i - \dfrac{q}{p}\right)}{a_i \times T_i + b_i \dfrac{q}{p}}\right] - C_i \times \left[c_i - \frac{a_i\left(a_i \times T_i - \dfrac{q}{p}\right)}{a_i \times T_i + b_i \dfrac{q}{p}}\right]\right]\right] \times \frac{\left(a_i \times T_i + b_i \times \dfrac{q}{p}\right)^2 \times p}{-\left(a_i \times T_i - \dfrac{q}{p}\right) a_i \times q}$$

i=1,2,…,m (18)

Так как множитель $1 \,/\, dE \,/db$ в нашем случае не равен нулю, то стационарное решение системы (10) определяется балансом взаимодействующих „социально-психологических сил“ линейным относительно установок Ei. При постоянных численностях групп они определяются из системы линейных алгебраических уравнений. Однако в исходной модели численности ni зависят от p, q и bi, поэтому необходимо определять значения сразу всей совокупности переменных.

Что касается исследования устойчивости системы, то при её анализе множитель $1 \,/\, dE \,/db$ не может быть отброшен, как и в предыдущем случае, когда экономической установкой считалось норма компенсации труда потреблением.

Определим теперь социально-экономическое равновесие как набор: *p* , q*, bi*, ni*, xi*, li* удовлетворяющей условиям

$\sum ni^*(ai\ li^* - xi^*)=x0,$ (19)

$\sum ni^* = N,$ (20)

$Fi(p^*, q^*, (bi^*)) = 0,$ *где* (21)

$$F_i[p,q,b_i] = A_i \times \left[\sum_{k=1}^{m} \delta_k \times \frac{a_k \times \left(a_k \times T_k - \dfrac{q}{p}\right)}{a_k \times T_k + b_k \times \dfrac{q}{p}} - \sigma_i \times \frac{a_i \times \left(a_i \times T_i - \dfrac{q}{p}\right)}{a_i \times T_i + b_i \times \dfrac{q}{p}}\right] - C_i \times \left[c_i - \frac{a_i \times (a_i \times T_i - \dfrac{q}{p})}{a_i \times T_i + b_i \times \dfrac{q}{p}}\right]$$

а равновесные значения *ni*, xi*, li** удовлетворяют соотношениям (4)-(6). Как нетрудно заметить, к прежним условиям равновесия добавляются условия на численности групп с определенным доходом и требование неизменности экономической установки под воздействием подражательного эффекта и рекламы.

Динамика рынка с включением динамики предпочтений будет описываться системой m+2 дифференциальных уравнений.

$$\frac{d}{dt}p = \mu \times \left[x_0 - \frac{q}{p} \times \left(\lambda_1 \times \frac{1+b_1}{a_1 \times T_1 \times p - q} + \lambda_2 \times \frac{1+b_2}{a_2 \times T_2 \times p - q} \right) \right] \qquad (22)$$

$$\frac{d}{dt}q = \tau \times \left[N - \left(\lambda_1 \times \frac{1+b_1}{a_1 \times T_1 \times p - q} + \lambda_2 \times \frac{1+b_2}{a_2 \times T_2 \times p - q} \right) \right] \qquad (23)$$

$$\frac{d}{dt}b_i = h_i \times F_i(p,q,b_i) \times \frac{\left(a_i \times T_i + b_i \times \frac{q}{p} \right)^2 \times p}{-\left(a_i \times T_i - \frac{q}{p} \right) a_i \times q} \qquad (24)$$

где коэффициенты *μ, τ, hi.* характеризуют степень влияния соответствующего дисбаланса на скорость изменения переменной, а *ni, xi, li* представлены через формулы (4) - (6).

Как было показано в [1], при произвольных bi > 0 и определенных соотношениях между остальными параметрами уравнений для уравнений (22)–(23) существует устойчивое стационарное решение, равное соответственно величинам

$$p^* = \sum_i^m \frac{(1+b_i) \times \lambda_i}{a_i T \; N - x0} \qquad (25a)$$

$$q^* = p^* \frac{x0}{N} \qquad (25b)$$

Так как в равновесии эти соотношения будут выполняться для bi= bi*, то из уравнений *Fi (p,q,bi)= 0* (26)

ценовые переменные *p, q* могут быть исключены, и мы получаем m алгебраических уравнений, решив которые находим *bi* , а затем по формуле (17) находим и сами *p* , q**.

Если сделать довольно естественное предположение, что цены *p*, q** равновесия устанавливаются быстрее, а предпочтения меняются медленно, то проблема устойчивости может рассматриваться следующим образом.

По доказанной в [1] теореме, устойчивость решения системы (14) - (15) не зависит от значений *bi* и определяется соотношениями между величинами *μ, τ* и параметрами *ai. Ti , x0*. В связи с этим можно исследовать устойчивость стационарных решений *bi = bi** , рассматривая только систему (16), заменив в ней все *p, q* на стационарные (по формулам (17)). Прежде всего заметим, что всякое стационарное решение с положительными *bi* является социально-экономическим равновесием, что легко проверяется простой подстановкой. Как бало отмечено ранее, большое количество параметров модели существенно затрудняет аналитическое исследование устойчивости, поэтому покажем на компьютерном аналоге, как выглядит динамика модели, когда экономическая установка выражается потреблением на единицу трудозатрат.

Как и в предыдущем случае, рассмотрим ситуацию, когда социально-экономическая система состоит из двух групп, производящих продукцию своим трудом и имеющих свои функции полезности. Параметры модели задаются следующими числовыми значениями.

п а р а м е т р ы	I группа	II группа
производительность труда при единичной интенсивности (ai)	0.5	0.5
предельная величина интенсивности труда (Ti)	8	9
коэффициент подражания другим (Ai)	0.100	0.447
коэффициент противодействия подражанию (σi)	1	1
величина внешнего стандарта (ci)	0.4	0.375
коэффициент влияния внешнего стандарта (Ci)	1.8	0.8
коэффициент социальной важности группы (λi)	3	7

Коэфициенты скорости изменения цен равны τ=0.90, μ=0.06. При данных значениях параметов стационарное состояние экономической системы вычисляется путём решения алгебраической системы из 4-х уравнений (11), (12), (18). В первых двух вместо *xi, li, ni* подставлены их рыночные выражения через *p, q, bi*).

Стационарные значения основных переменных оказываются следующими *p*=0.59; q*=0.393; b1*=0.33; b2*=3.19*. Вычислив собственные значения в этой точке матрицы частных производных правых частей уравнений (19) – (21), получим вектор

–1.163 + 2.949i
–1.163 – 2.949 i
–0.018
–0.077

Так как все значения действительной части корней соответствующего характеристического уравнения отрицательны, то стационарное решение дифференциальных уравнений устойчиво. Построим траектории искомых переменных в процессе рыночного функционировании путём изображения ломаных Эйлера. Задав в качестве начальных условий некоторые значения переменных, получим траектории, рассчитанные в пакете MATHCAD. На графике буквами *xt, yt* обозначены траектории переменных *b1(t)* и *b2(t).*

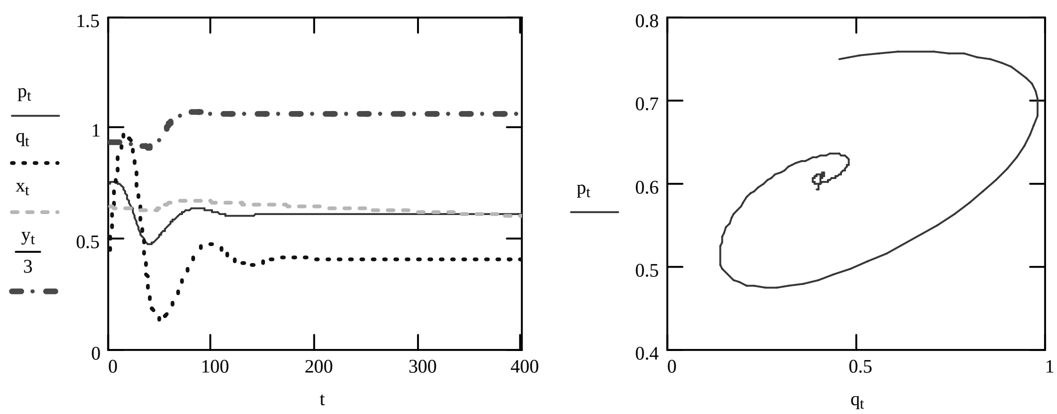
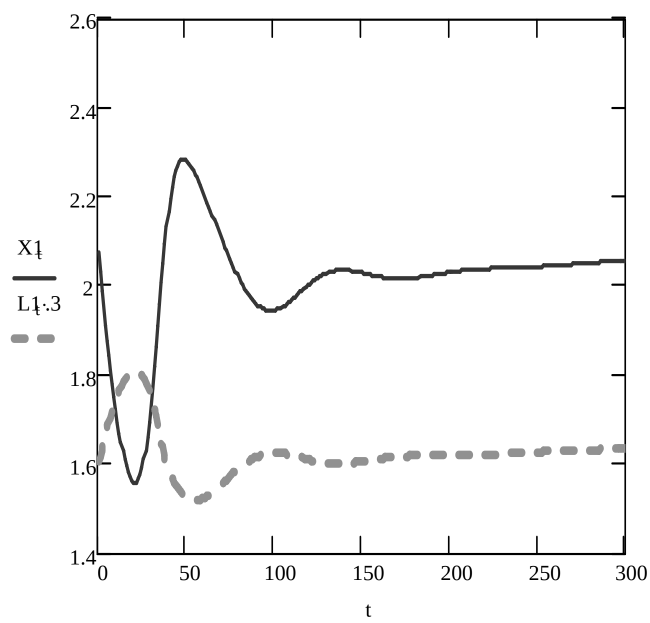


Рис.2



Явно видно, что с течением времени значения переменных стремятся к равновесным. На рис. 2 показаны траектории личного потребления в первой группе (X1(t)) и интенсивности труда во второй группе (L2(t)).

* * *

Достоинством компьютерных моделей является возможность с их помощью анализировать влияния разных факторов „внешней среды“ на поведение системы. Пусть нас интересует, к чему приведёт информационное воздействие на первую группу во второй модели. Параметрами воздействия могут быть „информационные фильтры“- коэффициенты в модели, меняющие представления о групповых численностях, или величина внешнего стандарта. Расчёты показывают, что чувствительность поведения системы к таким воздействиям может значительно варьировать. На информационные (в нашем случае) фильтры о численностях система реагирует слабее, чем на изменение внешнего стандарта (ci) или на силу внешнего воздействия (Ci). Так если при отсутствии фильтров, как мы видели, равновесие характеризовалось вектором p=0.59, q=0.393, b1=0.33, b2=3.19, то при искажении численностей (для первой группы) её исленности в 1.5 раз, а численности другой группы в 0.5 раз– новое равновесие изменится незначительно: p=0.595, q=0.396, b1=0.413, b2 =3.189. Видно, что в основном изменилось предпочтение первой группы в сторону увеличения важности свободного времени. Изменение силы влияния или следования рекламе (C) тоже оказывает значимое действие лишь на предпочтение первой группы, но изменение самого стандарта (c1) приводит к более заметному результату, представленному на следующей таблице.

Rc1	c11.04	c1	c1 0.95	c1 0.90	c1 0.80
p	0.572	0.590	0.610	0.633	696.
q	0.385	0.393	0.406	0.422	0.464
b1	0.097	0.330	1.650	1.704	1.846
b2	3.199	3.190	3.194	3.215	3.215

Как видно из таблицы, происходит воздействие только на первую группу. Однако меняется все: цены более сильно чем предпочтение второй группы, но предпочтение первой группы меняется значительно. Важность свободного времени даже обгоняет этот показатель для второй группы.

Как было отмечено выше, компьютерная имитация, снимает проблему сбора эмпирических данных, заменяя собой рассмотрение реального поведения социальной системы анализом виртуальных траекторий. Однако здесь возникает техническая, на первый взгляд, проблема, на самом деле являющаяся методологической, поскольку она обусловлена объективными закономерностями функционирования социума. Дело в том, что если исследователя, например, интересует поведение системы вблизи точки равновесия, то ему надо знать числовые характеристики этой точки. Но для этого необходимо задать заранее значения параметров модели, при которых будет существовать это равновесие. Кроме того, надо чтобы значения параметров обеспечивали устойчивость равновесия. Если бы до компьютерной реализации удалось чисто математически определить область возможных значений параметров, в которой существует устойчивое равновесие, то не было бы и проблемы с визуализацией траектории поведения системы. Но всё дело в том, что чаще всего как раз не удаётся обрисовать эту область априори[3]. Поэтому приходится интуитивно подбирать необходимую комбинацию значений параметров, которая не будет противоречить „*законам существования социума*“ фактически отражаемым в формализме математической модели. Отправляясь от когото исходного набора значений параметров, можно расширять область возможной устойчивости.

7. Заключение

В основных результатах данной работы можно выделить две составляющие: содержательную часть и компьютерную. В содержательной части предложено понятие экономической (или трудовой) установки, с помощью которой можно изучать динамику экономических предпочтений (*функции полезности*) в малоразмерных экономико-математических моделях. Трудовая установка может рассма-

---

[3] В работе [1] это удалось сделать по причине малого числа параметров.

триваться в двух вариантах: как предельная норма компенсации труда потреблением или как средняя величина потребления на единицу трудовых усилий. Основная идея здесь состоит в том, что изменение функции полезности является следствием изменения установки. Важно, что обе использованные установки на микроуровне могут быть измерены непосредственно, в отличие от прямого измерения функции полезности. Использование конкретных их модификаций в макромоделях, конечно, довольно затруднительно.

Формирование этих установок в группе предложено рассматривать как результат информационного взаимодействия социальных групп и общества, когда установка отдельного члена группы меняется в следствие стремлений быть таким, как другие (*эффект подражания*) и– как это навязывается общественными стандартами.

Однопродуктовая модель рынка с переменной социальной структурой, разработанная автором ранее, позволяет включить в себя подмодель формирования предпочтений, в которой определяются параметры функций полезности. Так как большое количество параметров и нелинейности модели существенно уменьшают возможности чисто математического анализа, то активное использование компьютерного анализа становится незаменимым.

Разумеется, выводы по компьютерной имитации, аналогичной в некотором роде индуктивному подходу, не обладают желательной всеобщностью. Однако для конкретных моделей анализ равновесия, его устойчивости и тому подобное – может быть достаточно эффективным. В статье приводится пример определенного анализа двух моделей; из него видно, как на подобных моделях можно проигрывать разные сценарии социально-экономической динамики. Главное– это то, что удалось на компьютерной модели рассмотреть в единстве динамику цен, потребления, численностей групп и трудовых предпочтений.

Для расчетов использовался стандартный пакет MATHCAD; в дальнейшем предполагается, что построение специальной программы имитации многомерного процесса позволит существенно продвинуться в изучении свойств социально-экономической реальности.

Литература

Гаврилец Ю.Н. Модель равновесия функционирования экономики с переменной структурой населения, ЭММ, 1994, том 30, № 2

_______ Соизмерение интересов и ценовое регулирование экономики с переменной структурой населения (модельный анализ), ЭММ, 1996, том 32, № 1

_______ Стохастическое моделирование межгрупповых информационных взаимодействий. ЭММ, 2003, выпуск 2

Гаврилец Ю.Н., Ефимов Б.А. Изменение предпочтений индивидов в социальной среде, ЭММ, том 33, № 2

Гаврилец Ю.Н., Степанов В.С. Моделирование изменения установки индивидов при нелинейных информационных взаимодействиях, Сборник «Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических процессов», 2004, выпуск 3, ЦЭМИ

Гаврилец Ю.Н., Карташева А.В. Модель формирования связанных установок, Сборник «Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических процессов», 1997, выпуск 1

Рашевский Н. Две модели: подражательное поведение и распределение статуса, СБ «Математические методы в современной буржуазной социологии», М, «Прогресс», 1996

Weidlich W. Dynamics of interacting social groups// Cooperative Phenomena, H. Haken, ed. N. Holland Publ., Comp. 1974

Weidlich W., Haag G., Concepts and Models of a Quantiteve Sosiology, Springer, Berlin -N.Y. 1983

Бахтизин А. Р. Вычислимая модель «Россия: Центр– Федеральные округа». Препринт WP/2003/151. М., ЦЭМИ РАН, 2003.

Макаров В. Л., Бахтизин А.Р., Эффективный способ оценки государственной политики. Экономика и управление, Уфа, 2001(4).

Макаров В. Л., Бахтизин А. Р., Бахтизина Н. В. CGE модель социальноэкономической системы России со встроенными нейронными сетями. М., ЦЭМИ РАН, 2005.

Лебедев, В. В., Лебедев, К. В., Математическое и компьютерное моделирование экономики М. МВТ-Дизайн, 2002.