ISPITIVANJE MOGUĆNOSTI DINAMIČKE ANALIZE KONKURENTSKE RAVNOTEŽE PRIVREDE

INQUIRY INTO THE DYNAMIC ANALYSIS OF COMPETETIVE EQUILIBRIUM OF ECONOMY

MARKO BACKOVIĆ I ZORAN POPOVIĆ, Ekonomski fakultet u Beogradu

Rezime: *U ovom radu analiziramo modele opšte ekonomske ravnoteže koji se zasnivaju na već definisanim matematičkim relacijama osnovnog Arrow-Debreu modela opšte ekonomske ravnoteže, a da pri tome model približe ekonomskoj realnosti. Odnosno, u ovom radu dajemo prikaz dva modela kada je osnovni Arrow-Debreu model opšte ekonomske ravnoteže proširen na način što je u procese tržišne razmjene uključena vremenska dimenzija i dimenzija neizvjesnosti kao moguće stanje prirode ekonomskog sistema.*

Abstract: *In this paper we analyse models of general economic equilibrium that are based on already defined mathematical relations of Arrow-Debreu model of general equilibrium that try to make that model more realistic. In other words, we will give review of two models in which basic Arrow-Debreu model of general equilibrium is extended in way to include time and uncertainty dimensions as a possible natural state of economic system.*

Ključne riječi: *ekonomska ravnoteža, konkurencija, Arrow-Debreu model, Walras ravnoteža.*

Key words: *Economic Equilibrium, Competition, Arrow-Debreu Model, Walras Equilibrium.*

UDC: 338.22; JEL classification: C 61 ;
Original Scientific paper ; Recived: November 02, 2005

1. Uvod

Teorija opšte ekonomske ravnoteže predstavlja na određeni način most između mikroekonomske i makroekonomske analize. Zasnovana je na ispitivanju ponašanja pojedinih ekonomskih subjekata, u uslovima postojanja slobodne ili ograničene konkurencije. Teorija opšte ekonomske ravnoteže je orijentisana na ispitivanje svih međuzavisnosti koje u okviru privrede postoje između pojedinih donosilaca ekonomskih odluka, kao i između roba i između tržišta.

Konkurentska ravnoteža ostvaruje se u uslovima kada na tržištu postoji slobodna konkurencija, odnosno kada nijedan od učesnika u procesu razmjene nema takvu ekonomsku snagu da može vršiti uticaj na nivoe cijena pojedinih proizvoda. Na taj način, podrazumijevamo da u uslovima slobodne konkurencije pojedini ekonomski subjekti cijene pojedinih proizvoda uzimaju kao zadane veličine, što predstavlja veoma značajnu pretpostavku prilikom ispitivanja uslova za ostvarivanje konkurentske ravnoteže. S obzirom da ćemo u narednim razmatranjima podrazumijevati postojanje slobodne tržišne konkurencije, pojmove opšte ekonomske i konkurentske ravnoteže smatraćemo sinonimima.

Model opšte ekonomske ravnoteže, koji predstavlja matematičko-metodološku osnovu ove teorije, zasnovan je na korišćenju matematičke aparature u cilju egzaktnog utvrđivanja uslova za ispitivanje i izračunavanje ravnotežnih stanja u okviru nekog ekonomskog sistema. Osnovni elementi modela opšte ekonomske ravnoteže determinisani su zahtjevom za ispitivanjem uslova čijim zadovoljenjem će ekonomske odluke pojedinih ekonomkih subjekata u postojećim uslovima dovesti do ostvarivanja opšte ravnoteže.

U uslovima postojanja konačnog broja proizvoda, njihove cijene se formiraju kao rezultat svih interakcija i pojedinačnih nastojanja potrošača i proizvođača da ostvare maksimalnu ekonomsku efikasnost. Izražavajući odgovarajućim matematičkim stavovima sve karakteristike pojedinih potrošača i proizvođača, kao i skupa roba, model opšte ekonomske ravnoteže omogućuje egzaktno definisanje značajnih teorijskih stavova i zaključaka.

Još od vremena definisanja osnovnog oblika modela opšte ekonomske ravnoteže od strane L. Walrasa, paralelno s nastojanjima da se na teorijski konzistentan način dokažu osnovni stavovi o karakteru i uslovima ostvarivanja konkurentske ravnoteže, vršeni su različiti pokušaji njegove operacionalizacije u cilju dobijanja empirijski upotrebljivih rješenja. Međutim, tek nakon dokazivanja egzistencije konkurentske ravnoteže, odnosno definisanja tzv. Arrow-Debreuovog modela, dobijena je konzistentna teorijska osnova za primjenu različitih numeričkih postupaka za izračunavanje ravnotežnih rješenja.

Osnovni oblik Arrow-Debreu modela opšte ekonomske ravnoteže polazi od pretpostavke koja isključuje vremensku dimenziju. Odnosno, polazi se od pretpostavke da se će se svi ušesnici u procesu razmjene (potrošači i proizvođači) sresti u tačno određenom trenutku vremena i na tačno određenoj lokaciji kako bi se izvršila razmjena roba.

Cilj ovog rada je da proširimo interpretaciju osnovnog Arrow-Debreu modela, koja će uključiti razmjenu roba posmatrano kroz vremensku dislokaciju i sa određenim stepenom neizvjesnosti. Pri tome, posmatrane ekonomske procese u vremenu i sa postojanjem stanja neizvjesnosti neophodno je smjestiti u već definisane matematičke objekte Arrow-Debreu modela.

2. Arrow-Debreu model opšte ekonomske ravnoteže sa diskretnim vremenskim periodom

U nastavku našeg rada osnovni oblik Arrow-Debreu modela opšte ekonomske ravoteže proširujemo uvođenjem diskretnog vremenskog perioda **0,1,2,...,*T***, i neka je

$T_0 = \{0,1,2,...,T\}$ skup vremenskih perioda u kojem se analizira ekonomski proces

Pri tome, u svakom vremenskom periodu postoji L proizvoda, gdje je $L \geq 1$, i neka je $\Lambda = \{1, 2, \ldots, L\}$ skup proizvoda.

Tada, posmatrano za sve vremenske periode, imamo $m = L(T+1)$ roba, pri čemu je robni prostor oblika $(\mathsf{R}^{\mathsf{L}})^{T+1} = R^{L(T+1)} = R^m$.

Dalje, uvodimo pretpostavku da u početnom vremenskom periodu $t = 0$ postoji na tržištu potpuna konkurencija, gdje svaki proizvod može biti kupljen ili prodat za isporuke u bilo kojem vremenskom periodu $t \in T_0$, i pri tome su u početnom vremenskom periodu $t = 0$ poznate cijene proizvoda za sve vremenske periode $t \in T_0$, tj. vektor

$P = (P(0), P(1), \dots, P(T))$ je vektor cijena vremenskog perioda $t = 0$.

Tada, iznos ukupnog prihoda potrošača u vremenskom periodu $t = 0$ predstavljamo sljedećim izrazom:

$$W = P(0)e(0) + P(1)e(1) + \dots + P(T)e(T) \quad (2.1)$$

gdje vektor $e = (e(0), e(1), \dots, e(T))$ predstavlja inicijalno bogatstvo potrošača robnog prostora $R^{L(T+1)}$.

S druge strane, ako pretpostavimo da potrošač upotrijebi ukupno inicijalno bogatstvo radi kupovine robe za sigurne isporuke robe za sve vremenske periode T_0, tada je u vremenskom periodu $t = 0$ ukupna potrošnja data izrazom

$$P(0)c(0) + P(1)c(1) + \dots + P(T)c(T), \quad (2.2)$$

gdje je $c = (c(0), c(1), \dots, c(T))$ vektor potrošnje nepraznog skupa potrošnje C kao podskupa robnog prostora $R^{L(T+1)}$, tj. $C \subset R^m$, odnosno potrošački skup potrošača i je nenegativni ortant robnog prostora, tj. $C = R_+^m$.

Pošto je vektor potrošnje ograničen budžetskim ograničenjem, odnosno posmatrano u vremenskom periodu $t = 0$ potrošač mora izabrati takav vektor potrošnje

$c = (c(0), c(1), \dots, c(t))$ koji zadovoljava uslov da je

$$P(0)c(0) + P(1)c(1) + \dots + P(T)c(T) \le W \quad (2.3)$$

Sada, kada smo izrazom (2.3) dali budžetsko ograničenje, definišemo *budžetski skup* za vektor cijena $P = (P(0), P(1), \dots, P(T))$ i dati ukupan prihod potrošača $W > 0$ kao ukupno inicijalno bogatstvo, oblika

$$B(P, W) = \{c \in C \mid Pc = P(0)c(0) + P(1)c(1) + \dots + P(T)c(T) \le W\}, \quad (2.4)$$

U daljoj analizi uvodimo osnovne pretpostavke koje će se odnositi na skup potrošnje, vektor inicijalnog bogatstva potrošača i finkciju korisnosti potrošača.

Osnovne pretpostavke[1]

(P1) $C = R_{++}^{L(T+1)}$, gdje sa $R_{++}^{L(T+1)}$ obilježavamo pozitivni ortant robnog prostora oblika;

$$R_{++}^{L(T+1)} = \{c = (c(0), c(1), \dots, c(T)) \in R^{L(T+1)} | c(j) > 0,\ j = 1, 2, \dots, T\};$$

(P2) $e \in R_{++}^{L(T+1)}$;

(P3) funkcija korisnosti $u \in C^2(C, R)$, gde je $C^2(C, R)$ skup funkcija s domenom C koji uzima vrijednosti iz skupa R i pri tome funkcija korisnosti dva puta diferencijabilna funkcija;

(P4) $Du(c) \in R_{++}^{L(T+1)}$ za svaki $c \in R_{++}^m$, pri čemu Jacobian matricu finkcije u gdje je $Du: C \to R$ definišemo

$$Du(c) = (D_1 u(c), D_2 u(c), \dots, D_n u(c)) = \left(\frac{\partial u(c)}{\partial c_1}, \frac{\partial u(c)}{\partial c_2}, \quad , \frac{\partial u(c)}{\partial c_n}\right) \in R_{++}^m,$$ kao funkciju parcijalne derivacije u tački c. Možemo reći da Jacobian matrica $Du(c)$ predstavlja linearnu formu definisanu u prostoru $R^{L(T+1)}$,odnosno vektori Jacobian matrice $Du(c)$ ako ih

[1] Potpuniji prikaz implikacija osnovnih pretpostavki dat je u: Balasko, Y. (1988), Fundations of the Theory of General Equilibrium, Academic Press.

obilježimo kao $grad\ \ u(c)$ predstavljaju gradijente funkcije u koji su ocijenjeni u okolini tačke c.

(P5) za $c \in R^m_{++}$ je $\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} h_j h_k \frac{\partial^2 u(c)}{\partial c_j \partial c_k} < 0$, za svaki $h \in R^m$, i za $h \neq 0$ tada je $\sum_{j=1}^{m} h_j \frac{\partial u(c)}{\partial c_j} = 0$, gdje $D^2 u(c)$ predstavlja *Hessian matricu funkcije* korisnosti u vrednovane u tački c, odnosno za simetričnu nxn matricu vrijednost na poziciji (i, j) je $D^2_{ij} u(c) = \frac{\partial^2 u(c)}{\partial c_i \partial c_j}$.

Pretpostavke (P1) i (P2) impliciraju da inicijalno bogatsto potrošača predstavlja moguću potrošnju. Pretpostavke (P3), (P4) i (P5) koje je uveo Debreu G. (1972) u radu «Smooth Prefernces», Econometrica, N° 40, daju mogućnost dobijanja diferencijabilne funkcije tražnje za robe u standardnom modelu opšte ekonomske ravnoteže.

Pošto smo uveli osnovne pretpostavke možemo matematički formulisati pojam potrošača koji zadovoljava uvedene pretpostavke.

Potrošača definišemo kao *uređenu trojku* (C, u, e), gdje je $u : C \to R$ (tj. $u : R^m_+ \to R$) funkcija korisnosti potrošača.

Ako je inicijalno bogatstvo $W > 0$ dovoljno veliko tako da potrošač ima mogućnost izbora, tada su preferencije[2] potrošača date preko funkcije korisnosti i pri tome pretpostavljamo da se ukupno inicijalno bogatstvo potrošača koristi za potrošnju, tada *potrošački problem* matematički definišemo

$$\begin{aligned} &\max_c \ u(c(0), c(1), \ldots, c(T)) \qquad gdje \ \ je \ \ c \in C \\ &P(0)c(0) + P(1)c(1) + \ \ldots \ P(T)c(T) \leq W \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pošto smo definisali potrošački problem izrazom (2.5) narednom propozicijom dajemo tvrđenje (bez dokaza[3]) o postojanju rješenja definisanog potrošačkog problema (izraz 2.5).

Propozicija 2.1.

(a) postoji jedinstveno rešenje potrošačkog problema gore definisanog izrazom (2.5) i tada je $P\bar{c} = W$

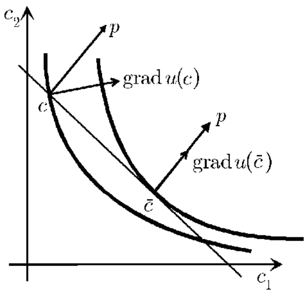
(b) vektor potrošnje $\bar{c}$ je rješenje potrošačkog problema ako i samo ako za neki $\lambda > 0$ je

$$\begin{cases} grad\ \ u\left(\bar{c}\right) - \lambda P = 0 \\ \\ P\bar{c} = W \end{cases} \tag{2.6}$$

Relacije koje smo dali u Propoziciji 2.1, radi jasnijeg prikaza stavova predstavićemo slikom 2.1, a zatim dati neka od objašnjenja.

[2] O definisanju preferencija potrošača videti u Marko M. Backović (1992), Analiza modela opšte ekonomske ravnoteže – *doktorska disertacija,* Ekonomski fakultet u Beogradu, ss. 29– 38.

[3] Dokaz se može vidjeti u: Borglin A. and Tvede M.(2003), Economic dynamics and general equilibrium, Time and Uncertainty.



Slika 2.1

Na osnovu date slike 2.1 vidi se da je vektor potrošnje c rješenje potrošačkog problema ako i samo ako vektor potrošnje c pripada budžetskoj hiper-ravni i ako je gradijent funkcije korisnosti potrošača $grad\ u(c)$ proporcionalan vektoru cijena P, odnosno vektor potrošnje $\bar{c}$ predstavlja rješenje potrošačkog problema.

Rešenje potrošačkog problema $\bar{c}$ gdje vektor cijena P predstavlja "tržišne procjene" potreba koje su proporcionalne gradijentu funkcije korisnosti potrošača, odnosno gradijent funkcije korisnosti potrošača predstavlja potrošačku subjektivnu procjenu.

Sada, pošto smo definisali parcijalno potrošački problem, u daljem radu prelazimo na analizu ekonomskog sistema, odnosno posmatramo skup potrošača $N = \{1,2, \dots ,I\}$ u nekoj ekonomiji Ξ koju definišemo :

Definicija 2.1. Ekonomski sistem Ξ je uređena trojka $\left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}$ gdje , za $i \in N$, uređena trojka $\left(C^i, u^i, e^i\right)$ je potrošač. Pri tome, na nivou ekonomskog sistema s uvedenim pretpostavkama na skupovima potrošnje potrošača, vektorima inicijalnog bogatstva potrošača i budžetskim ograničenjima svakog od potrošača, potrebno je da definišemo šta je to ostvariva (moguća) alokacija potrošnje za razmatrani ekonomski sistem Ξ .

Definicija 2.1a. Alokacija potrošnje $c = \left(c^1, c^2, \dots, c^I\right)$ za ekonomski sistem $\Xi = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}$ je *ostvariva (moguća)* ako :

(i) $c^i \in C$, za $i = 1,2, \dots ,I$, i

(ii) $\sum_{i=}^{I}\left(c^i - e^i\right) \le 0$,

pri čemu je F *skup*[4] *ostvarivih (mogućih)* alokacija oblika

$$F = \left\{ c \in C \,\middle|\, \sum_{i=1}^{I}\left(c^i - e^i\right) \le 0 \right\}.$$

Sada, pošto smo definisali ekonomski sistem i postavili ograničenja na raspodjeli potrošnje, možemo definisati Walras ravnotežu, odnosno odrediti cjenovni skup i skup najboljih rješenja kao vektora potrošnje prema cjenovnom skupu, a da su pri tome svojstva rješenja kompatibilna s ukupnim inicijalnim bogatstvom u ekonomiji.

---

[4] Može se konstatovati da skup ostvarivih alokacija F zavisi samo od agregatnog inicijalnog bogatstva $e = \sum_{i=1}^{I} e^i$, i pri tome ne zavisi od distribucije (raspodjele) inicijalnog bogatstva između potrošača. U najjednostavnijim interpretacijama tržišne ekonomije vektor inicijalnog bogatstva je egzogeno zadata veličina.

Definicija 2.2. Walras ravnoteža za ekonomski sistem $\Xi = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}$ predstavlja par $\left(\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}, P\right)$, gde $P \in R_{++}^{L(T+1)}$ takav da

(a) za svakog potrošača $i \in N$, vektor potrošnje $\bar{c}^i$ je rešenje potrošačkog problema kao problema maksimuma sa zadatim budžetskim ograničenjima , tj.

$$\max_c \; u^i(c)\,, \qquad za \quad c \in B^i(P, Pe^i) \;;$$

(a) vektor potrošnje $\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}$ je ravnotežna raspodjela (alokacija) potrošnje.

Ako je $\left(\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}, P\right)$ Walras ravnoteža, tada je $\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}$ Walras ravnotežna alokacija potrošnje i P je Walras ravnotežni vektor cijena. Uopšteno, za ekonomiju Ξ, alokacija $\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}$ je Walras ravnotežna alokacija ako postoji vektor cijena P takav da je $\left(\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}, P\right)$ Walras ravnoteža, i P je Walras ravnotežni vektor cijena ako postoji vektor potrošnje $\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}$ takva da je $\left(\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}, P\right)$ Walras ravnoteža. Naime, ako se na tržištu formira ravnotežni vektor cijena i ako rješenja potrošačkog problema formiraju alokaciju potrošnje tako da se uspostavlja tržišna ravnoteža, tada možemo reći da tržišna ravnoteža predstavlja stanje jednakosti između vektora potrošnje i vektora inicijalnog bogatstva u prostoru $(\mathrm{R}^{\mathrm{L}})^{T+1}$, tj.

$$\sum_{i\in N} \bar{c}^i = \sum_{i\in N} e^i\,, \tag{2.7}$$

ili, ako predstavimo u vremenskom prostoru detaljnije, tržišna ravnoteža predstavlja stanje jednakosti između vektora u prostoru R^L, tj.

$$\begin{aligned} \sum_{i\in N} \bar{c}^i(0) &= \sum_{i\in N} e^i(0) \\ \sum_{i\in N} \bar{c}^i(1) &= \sum_{i\in N} e^i(1) \\ &\;\;\ldots\ldots. \\ \sum_{i\in N} \bar{c}^i(T) &= \sum_{i\in N} e^i(T) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Na osnovu gore datog slijedi da ako se na tržištu formira ravnotežni vektor cijena i ravnotežni vektor potrošnje slijedi da izraz

$$\left(\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}, P\right) = \left(\left(\left(\bar{c}^i\right)_{t\in T_0}\right)_{i\in N}, \left(P(t)\right)_{t\in T_0}\right) \tag{2.9}$$

predstavlja Walras ravnotežu[5].

U našoj daljoj analizi uspostavićemo vezu između Walras ravnotežne alokacije i Pareto optimalne alokacije, pri čemu ćemo pokazati da svaka Walras ravnotežna alokacija vremenskog perioda $t = 0$ predstavlja Pareto optimalno stanje, odnosno da svako Pareto optimalno stanje može biti ostvareno kao Walras ravnotežna alokacija vremenskog perioda $t = 0$. Odnose gore navedene Walras ravnotežne alokacije i Pareto optimalnog stanja predstavićemo u obliku odgovarajućih teorema.

Prije nego što izložimo kroz odgovarajuće teoreme odnos između Walras ravnotežne alokacije i Pareto optimalne alokacije, potrebno je da definišemo Pareto optimalnu alokaciju ekonomskog sistema.

Definicija 2.3 Uređena trojka oblika $\Xi = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}$ predstavlja ekonomski sistem dat definicijom 2.1, i neka postoje alokacije potrošnje $\left(\bar{c}\right)_{i\in N}$ i $\left(c'\right)_{i\in N}$ ekonomskog sistema Ξ. Tada, za alokaciju potrošnje $\left(c'\right)_{i\in N}$ kažemo da je *Pareto dominantna* alokacija u odnosu na alokaciju potrošnje $\left(\bar{c}\right)_{i\in N}$ ako je

za svaki $i \in N$, $u^i\left(c'^i\right) \geq u^i\left(\bar{c}^i\right)$, i za neki $i \in N$ $u^i\left(c'^i\right) > u^i\left(\bar{c}^i\right)$.

Dakle, alokacija potrošnje $\left(\bar{c}\right)_{i\in N}$ predstavlja *Pareto optimalnu alokaciju* ekonomskog sistema Ξ, ako i samo ako ne postoji ni jedna alokacija potrošnje ekonomskog sistema Ξ koja bi bila Pareto dominantna alokacija u odnosu alokaciju potrošnje $\left(\bar{c}\right)_{i\in N}$.

Sada, nakon definisane Pareto optimalne alokacije, kao i gore uvedenih pretpostavki o skupovima potrošnje i funkcije korisnosti potrošača, možemo predstaviti stavove prve bazične teoreme teorije blagostanja.

Teorema 2.1 Neka uređena trojka oblika $\Xi = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}$ predstavlja definisani ekonomski sistem, i neka par $\left(\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}, P\right)$ predstavlja definisanu Walras ravnotežnu alokaciju za ekonomski sistem Ξ. Tada, ravnotežna alokacija potrošnje $\left(\bar{c}\right)_{i\in N}$ je Pareto optimalna alokacija za ekonomski sistem Ξ.

Dokaz. Posmatramo potrošača $i \in N$, tada na osnovu Definicije 2.2 Walras ravnotežnog sistema, imamo da je $P\bar{c}^i = Pe^i$. Izaberimo bilo koji program potrošnje c^i potrošača i takav da je $u^i\left(c^i\right) \geq u^i\left(\bar{c}^i\right)$. Sada, imamo da je[6] $Du^i\left(\bar{c}^i\right)c^i \geq Du^i\left(\bar{c}^i\right)\bar{c}^i$, pri tome, ako je $c^i \neq \bar{c}^i$ tada je $Du^i\left(\bar{c}^i\right)c^i > Du^i\left(\bar{c}^i\right)\bar{c}^i$.

---

[5] Strožija verzija Walrasovog zakona.

[6] Vidjeti u: Balasko Y. (1988), Fundations of the Theory of General Equilibrium, Academic Press.

Dalje, na osnovu stava (b) Propozicije 2.1 imamo da je gradijent funkcije korisnosti $Du^i\left(\bar{c}^i\right)$ proporcionalan vektoru cena P. Dakle, imamo da je

$u^i\left(c^i\right) \geq u^i\left(\bar{c}^i\right)$ što implicira da je $Pc^i \geq P\bar{c}^i$, i

$u^i\left(c^i\right) > u^i\left(\bar{c}^i\right)$ što implicira da je $Pc^i > P\bar{c}^i$.

Sada, uvodimo hipotezu da imamo protivurječnost, tj. da vektor $\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}$ nije Pareto optimalna alokacija za ekonomski sistem Ξ, odnosno neka postoji alokacija potrošnje $\left(c^{'i}\right)_{i\in N}$ za ekonomski sistem Ξ koja Pareto dominira nad alokacijom potrošnje $\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}$. Dalje, možemo pretpostaviti bez gubitka opštosti da je za potrošača $i = 1$

$u^1\left(c^{'1}\right) > u^1\left(\bar{c}^1\right)$, i da je za ostale potrošače $u^i\left(c^{'i}\right) \geq u^i\left(\bar{c}^i\right)$, za $i \in N$,što slijedi da je

$Pc^{'1} > P\bar{c}^1 = Pe^1$, i $\qquad Pc^{'i} > P\bar{c}^i = Pe^i$, za $i \in N$ i $i \neq 1$,

sumirajući gore date nejednakosti po i dobija se

$$\sum_{i\in N} Pc^{'i} > \sum_{i\in N} Pe^i .$$

S druge starne, budući da je $\left(c^{'i}\right)_{i\in N}$ alokacija za zadati ekonomski sistem Ξ, imamo da je

$\sum_{i\in N} c^{'i} = \sum_{i\in N} e^i$, što dalje implicira da je $\sum_{i\in N} Pc^{'i} = \sum_{i\in N} Pe^i$.

Na osnovu dobijenog zaključujemo da su iznad date nejednakosti opovrgnute, tj. da je uvedena hipoteza o postojanju Pareto dominantne alokacije nad alokacijom potrošnje $\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}$ netačna.

Zato, potvrđujemo da je alokacija potrošnje $\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}$ Pareto optimalna alokacija.

Dakle, na osnovu uvedene pretpostavke o diferencijabilnosti funkcije korisnosti i primjenom stavova Propozicije 2.1 za ravnotežnu alokaciju potrošnje $\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}$ potrošača $i \in N$ s inicijalnim bogatstvom $W^i = Pe^i$ i neko $\lambda^i > 0$ imamo da je

$$\begin{cases} grad\ u^i\left(\bar{c}^i\right) - \lambda^i P = 0 \\ P\bar{c}^i - Pe^i = 0 \end{cases} . \qquad (2.10)$$

Gradijent funkcije korisnosti potrošača predstavlja subjektivno (marginalno) vrednovanje potreba, pri tome cijene su određene od strane tržišta. Ravnotežnom alokacijom možemo smatrati svako marginalno vrednovanje potreba koje je jednako tržišnom vrednovanju. Svako odstupanje marginalnog vrednovanja potreba kao subjektivne procene od tržišnog vrednovanja ima za posljedicu narušavanje ravnotežnog stanja.

Druga bazična teorema teorije blagostanja sadržana je u tvrdnji da se svako Pareto optimalno stanje ekonomskog sistema može ostvariti preko mehanizma slobodne konkurencije kao njegova konkurentska ravnoteža.

Teorema 2.2 Neka uređena trojka oblika $\Xi = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}$ predstavlja ekonomski sistem, i neka vektor $\left(\bar{c}^{\,i}\right)_{i\in N}$ je Pareto optimalna alokacija za ekonomski sistem Ξ. Tada, postoji vektor cijena $P \in R^m_{++}$ takav da par $\left(\left(\bar{c}^{\,i}\right)_{i\in N}, P\right)$ predstavlja Walras ravnotežu ekonomskog sistema $\Xi' = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}$.

Dokaz. Neka je $\left(u^i\left(\bar{c}^{\,i}\right)\right)_{i\in N}$ funkcija korisnosti date Pareto optimalne alokacije. Buduđi da je alokacija $\left(\bar{c}^{\,i}\right)_{i\in N}$ Pareto optimalna alokacija, slijedi da je $\left(\bar{c}^{\,i}\right)_{i\in N}$ rješenje problema maksimizacije, tj. $\max\limits_{\left(c^i\right)_{i\in N}} u^1\left(c^1\right)$

$$c^i \in C \text{ , i}$$

$$\begin{cases} u^i\left(c^i\right) - u^i\left(\bar{c}^{\,i}\right) = 0 & za\ i \in N,\ i \neq 1 \\ \sum\limits_{i\in N} c^i_l - \sum\limits_{i\in N} e^i_l = 0 & za\ \ l \in \Lambda \end{cases}$$

Teorema Lagrangea tvrdi da postoje multiplikatori α^i za $i \in N$ i $i \neq 1$, i vektor $\lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2,\ \ldots, \lambda_L\right)$ takvi da

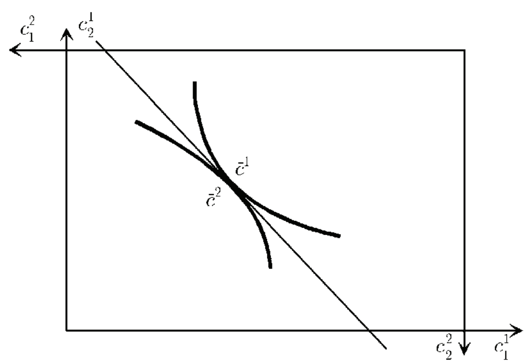
$$\begin{cases} grad\ u^1\left(\bar{c}^{\,1}\right) - \lambda = 0 \\ \alpha^i\ grad\ u^i\left(\bar{c}^{\,i}\right) - \lambda = 0\ \ za\ i \in N, i \neq 1 \end{cases}.$$

Iz prve relacije slijedi da je vektor $\lambda \in R^m_{++}$ s obzirom da su vrijednosti gradijenata pozitivne, vektor na osnovu uvedene pretpostavke (P3). Ovo dalje implicira da su vrijednosti α^i za $i \in N$ i $i \neq 1$ pozitivne vrijednosti. Vektor λ je nezavisan od potrošačkog razmatranja, odnosno ovo sugerira da bi vektor λ mogao biti upotrebljen za određivanje vektora cijena $P \in R^m_{++}$ kao Lagrangeovi multiplikatori. Neka je $P = \lambda$ tada imamo da je

$$\begin{cases} grad\ u^1\left(\bar{c}^1\right) - 1 \cdot P = 0 \\ grad\ u^i\left(\bar{c}^i\right) - \dfrac{1}{\alpha^i} \cdot P = 0 \ \ za\ i \in N, i \neq 1 \end{cases} \qquad (2.11)$$

Primjenom stava (b) Propozicije 2.1 vektor $\bar{c}^i$ je rješenje potrošačkog problema za potrošača i. Inicijalno bogatstvo potrošača i dato je izrazom $W = P\bar{c}^i$, što dalje slijedi na osnovu izraza (2.11) da je $\bar{c}^i$ rešenje potrošačkog problema za potrošača i u prostoru (P,W). S obzirom da je $\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}$ vektor alokacije za ekonomski sistem $\Xi' = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}$ na osnovu toga slijedi da vektor potrošnje i vektor cijena kao par $\left(\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}, P\right)$ predstavlja Walras ravnotežnu alokaciju za ekonomski sistem Ξ'.

Na slici 2.2 predstavljamo Pareto optimalnu alokaciju $\left(\bar{c}^i\right)_{i\in N}$ koja je Walras ravnotežna alokacija za ekonomski sistem $\Xi' = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}$.



Slika 2.2

Par $\left(\bar{c}^1, \bar{c}^2\right)$ predstavljen na slici 2.2 predstavlja Walras ravnotežnu alokaciju za bilo koji ekonomski sistem koji ima inicijalno bogatstvo na zajedničkoj budžetskoj hiperravni, odnosno, alokacija se može ostvariti preraspodjelom inicijalnih resursa i upotrebom cjenovnog sistema.

U dokazu Teoreme 2.2 zapravo se pošlo od izjednačavanja subjektivnih procjena potrošača koje su predstavljene preko funkcija potrošačkih gradijenata, i tržišnog vrednovanja datog preko cjenovnog sistema. Tržišno vrednovanje, u stvari se pojavljuje kao Lagrangeovi multiplikatori koji određuju tržišnu ravnotežu.

Pošto smo dali bazične teoreme teorije blagostanja, sada možemo dati i posljedicu koja je prouzrokovana tvrdnjama prethodnih teorema.

Posledica 2.1 Neka je $\Xi = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}$ ekonomski sistem i neka je $\left(\overset{-i}{c}\right)_{i\in N}$ alokacija za ekonomski sistem $\Xi^{'}$. Alokacija $\left(\overset{-i}{c}\right)_{i\in N}$ je Pareto optimalna alokacija ako i samo ako svaki gradijent funkcije korisnosti ocenjen u tački $\left(\overset{-i}{c}\right)_{i\in N}$ proporcionalan vektoru cijena $P \in R^m_{++}$, odnosno postoje brojevi $za\, svaki \;\; i \in N, \;\; \alpha^i \in R,$ takav da je

$$grad \;\; u^i\left(\overset{-i}{c}\right) = \alpha^i P \qquad (2.12)$$

Relacija data izrazom 2.14 proizilazi iz stavova Prve i Druge bazične teoreme teorije blagostanja, odnosno, ako je $\left(\overset{-i}{c}\right)_{i\in N}$, Pareto optimalna alokacija za ekonomski sistem $\Xi = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}$ tada, na osnovu tvrdnje Druge bazične teoreme teorije blagostanja (Teorema 2.2) postoji vektor cijena $P^{'} \in \left(R^L_{++}\right)^{T+1}$ takav da par $\left(\left(\overset{-i}{c}\right)_{i\in N}, P^{'}\right)$ predstavlja Walras ravnotežnu alokaciju za ekonomski sistem $\Xi^{'} = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}$. Zatim, uslov dat izrazom 2.12 je zadovoljen ako je $P = P^{'}$, što znači da je svaka potrošnja rešenje Potrošačkog problema.

Suprotno, ako je uslov dat izrazom 2.12 zadovoljen za neki vektor cijena P i α^i, za $i \in N$, tada par $\left(\left(\overset{-i}{c}\right)_{i\in N}, P\right)$ predstavlja Walras ravnotežnu alokaciju za ekonomski sistem $\Xi^{'} = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i\in N}$. Sada, primjenom tvrdnje Prve bazične teoreme teorije blagostanja (Teorema 2.1), alokacija $\left(\overset{-i}{c}\right)_{i\in N}$ je Pareto optimalna alokacija.

Prethodna razmatranja Potrošačkog problema impliciraju zaključak da su uvedene osnovne pretpostavke (P1) – (P5) osigurale postojanje jedinstvenog rješenja. Dalje, pokazali smo da su osnovne pretpostavke osigurale u ekonomskom sistemu postojanje barem jednog Walras ravnotežnog stanja, i da je svaka Walras ravnotežna alokacija istovremeno Pareto optimalna alokacija. Posmatrano obrnuto, svaka Pareto optimalna alokacija ekonomskog sistema mogla bi biti ostvarena kao Walras ravnotežna alokacija pod uslovom da je inicijalno bogatstvo redistribuirano na odgovarajući način.

3. Sekvencijalni model ekonomskog sistema

U drugom poglavlju posmatrali smo ekonomski sistem u vremenskoj dimenziji i kao takav analizirali postojanje ravnotežnog stanja sistema. Pri tome, nijesmo uzimali u razmatranje postojanje određenog stepena neizvjesnosti koji utiče na ravnotežno stanje ekonomskig sistema. U našoj daljoj analizi ekonomskog sistema s ciljem približavanja ekonomskoj realnosti, radi postizanja ravnotežnog stanja sistema, uključujemo u ekonomske procese postojanje određenog stepena neizvjesnosti koji ima uticaja na ravnotežno stanje. Naime, u kontekstu opšte ravnoteže, sekvencijalna struktura ekonomskog sistema istraživana je od strane Johna Hicksa (1939) kao i u od strane teoretičara Erica Lindahla (1939) i Erica Lundberga (1937). U sekvencijalnom modelu ekonomskog sistema, umjesto jedne savršeno konkurentske ravnoteže (Arrow-Debreu model) određene u početnom vremenskom periodu, koja ostaje kroz sve buduće vremenske periode, sekvencijali model razmatra niz ravnotežnih stanja ekonomskog sistema.

Sekvencijalni model ekonomskog sistema možemo predstaviti kao niz vremenski perioda, gde svaki od vremenskih perioda ima skup stanja, pri čemu stanja prirode postoje za buduće vremenske periode. Stanje ekonomskog sistema predstavljamo skupom $S_0 = \{0,1,2, \dots, S\}$ posmatrano s pozicije vremenskog perioda $t = 0$, dok s pozicije budućih vremenskih perioda moguća (vjerovatna) stanja ekonomskog sistema su $S_1 = \{1,2, \dots, S\}$

U nastavku rada prezentiramo Arrow-Debreu ekonomski model s dva vremenska perioda kao jednostavniji slučaj, međutim, rezultati mogu biti uopšteni i na ekonomske modele sa T konačnih vremenskih razdoblja.

Stanje ekonomskog sistema predstavljamo skupom $S_0 = \{0,1,2, \dots, S\}$ posmatrano s pozicije vremenskog perioda $t = 0$, dok s pozicije vremenskog perioda $t = 1$ moguća (vjerovatna) stanja ekonomskog sistema su $S_1 = \{1,2, \dots, S\}$. Naime, Arrow-Debreu model pretpostavlja da postoji L vrsta fizički diferencirane robe, sa S mogući stanja prirode u vremenskom periodu $t = 1$, što znači da postoji $(S+1) \cdot L$ roba.

Vektor cijena robe u vremenskom periodu $t = 0$ za ostvareno stanje s je oblika

$$P(s) = (P_1(s), P_2(s), \dots, P_L(s)) \in R_+^L,$$

pri tome je vektor cijena vremenskog perioda $t = 0$ za sva moguća stanja S_0 oblika

$$P = (P(0), P(1), \dots, P(S))$$

Analogno definisanom potrošačkom problemu u prethodnom dijelu rada (izraz 2.5), možemo definisati Arrow-Debreu potrošački problem u uslovima postojanja neizvjesnosti u obliku

$$\max_c u(c(0), c(1), \dots, c(S))$$

$$c \in C$$

$$P(0)c(0) + P(1)c(1) + \dots + P(S)c(S) \le W, \tag{3.1}$$

gde je

$$W = P(0)e(0) + P(1)e(1) + \dots + P(S)e(S)$$

pri tome, budžetski skup svakog potrošača i je definisan oblika

$$B_{AD}(P, e^i) = \{c^i \in C | \ P(c^i - e^i) = 0\}, \tag{3.1a}$$

tj.

$$B_{AD}(P, e^i) = \{c^i \in R_+^n | \ P(c^i - e^i) = 0\}$$

gdje plan potrošnje $(c(0), c(1), c(2), \dots, c(S))$ predstavlja potrošnju u obliku para

$(c(0), c(s)) \in (R_{++}^L)^2$ ako se desilo stanje $s \in S_1$,

Sada, ako posmatramo ekonomski sistem kao uređenu n-torku $\Xi = (C^i, u^i, e^i)_{i \in N}$ tada Walras ranotežnu alokaciju ekonomskog sistema Ξ kao tržišnu ravnotežu dajemo narednom definicijom.

Definicija 3.1 Tržišnu ravnotežu, za ekonomski sistem predstavljen kao uređena n-torka $\Xi = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i \in N}$, predstavlja uređeni par $\left(\left(\bar{c}^i\right)_{i \in N}, \bar{P}\right)$, gdje je za svako $i \in N$, vektor potrošnje $\left(\bar{c}^i\right)_{i \in N}$ ravnotežno rešenje (alokacija) i vektor cijena $\bar{P}$ Potrošačkog problema datog izrazom 3.1, tako da imamo tržišnu ravnotežu u obliku $\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{c}^i - e^i\right) = 0$, odnosno,

(a) $\bar{c}^i \in \arg\max\left\{u^i\left(c^i\right) \middle| c^i \in B_{AD}\left(\bar{P}, e^i\right)\right\}, \quad i = 1,2, \ldots, I$

(b) $\sum_{i=1}^{I}\left(\bar{c}^i - e^i\right) = 0$

Ovako zadati uslovi treba da obezbijede tržišnu ravnotežu u vremenskom periodu $t = 0$, odnosno tržišna ravnoteža obezbjeđuje da u vremenskom periodu $t = 0$ trgovina robama za ostvarene isporuke u vremenskom periodu $t = 1$ za sva stanja prirode $\sum_{i \in N}\left(\bar{c}^i(s) - e^i(s)\right)$ bude *jednaka nuli*, što značu da su potrošački planovi kompatibilni za svaki izbor stanja prirode, tj. svaki potrošač maksimizira svoju funkciju korisnosti pri čemu postoji tržišna ravnoteža koja se ogleda u tome da je ukupna tražnja svakog dobra u svakom stanju prirode jednaka ukupnoj ponudi.

Narednom teoremom dajemo tvrđenje o egzistenciji (postojanju) tržišne ravnoteže u uslovima postojanja neizvjesnosti.

Teorema 3.1 (Egzistencija rješenja modela opšte ekonomske ravnoteže u uslovima postojanja neizvjesnosti)

Neka funkcija korisnosti u zadovoljava uvedene osnovne pretpostavke (P3) – (P5), i ako ukupno inicijalno bogatstvo $\sum_{i=1}^{I} e^i \in R^n_{++}$, tada ekonomski sistem $\Xi = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i \in N}$ postoji tržišna ravnoteža data definicijom 3.1.

Kako se u postupku dokazivanja postojanja ravnotežnog rešenja Arrow-Debreu modela koriste stavovi teorema Browera i Kakutania o postojanju fiksne tačke, za ovaj dokaz egzistencija rješenja modela opšte ekonomske ravnoteže u uslovima postojanja neizvjesnosti neophodno je koristiti diferencijabilnu verziju Browerove teoreme[7].

Pošto smo prethodnom teoremom dali tvrđenje o egzistenciji ravnotežnog reženja Arrow-Debreu modela u uslovima postojanja neizvjesnosti, sada tako prezentiran model s ekonomske tačke gledišta predstavlja idealan mehanizam koji vodi ka Pareto optimalnoj alokaciji ekonomskog sistema.

Teorema 3.2 Neka je $\Xi = \left(C^i, u^i, e^i\right)_{i \in N}$ ekonomski sistem sa funkcijom korisnosti koja zadovoljava uvedene pretpostavke (P3) – (P5), i neka par $\left(\left(\bar{c}^i\right)_{i \in N}, \bar{P}\right)$ predstavlja

[7] Dokaz vidjeti u: Magill M. and Quinzii M. (2002), Theory of incomplete markets.

kontingent tržišnu ravnotežu datu definicijom 3.1, tada, alokacija potrošnje $\left(\bar{c}\right)_{i\in N}$ je Pareto optimalna alokacija.

Dokaz. Pretpostavimo da vektor $\bar{c}$ nije Pareto optimalna alokacija[8], i da postoji alokacija potrošnje[9] $c \in F$ takva da je funkcija korisnosti za sve potrošače

$$u^i\left(c^i\right) \geq u^i\left(\bar{c}^i\right), \text{ za svako } i = 1,2, \dots, I \text{, i za nekog potrošača } j \text{ je } u^j\left(c^j\right) > u^j\left(\bar{c}^j\right).$$

Budući da je, plan potrošnje $\bar{c}^j$ optimalan za potrošača j u budžetskom skupu $B_{AD}\left(\bar{P}, e^j\right)$, slijedi da plan potrošnje c^j ne pripada budžetskom skupu $B_{AD}\left(\bar{P}, e^j\right)$, tj. $c^j \notin B_{AD}\left(\bar{P}, e^j\right)$, odnosno $\bar{P}c^j > \bar{P}e^j$. Dakle, kako je funkcija korisnosti u^i monotona funkcija, za svako $i \neq j$ je $\bar{P}c^i \geq \bar{P}e^i$. Prema tome, slijedi da je agregatna potrošnja strogo veća od agregatnog inicijalnog bogatstva, tj. $\bar{P}\sum_{i=1}^{I} c^i > \bar{P}\sum_{i=1}^{I} e^i$,
što je kontradiktorno pretpostavci da vektor potrošnje c pripada skupu ostvarivih (mogućih) alokacija F.

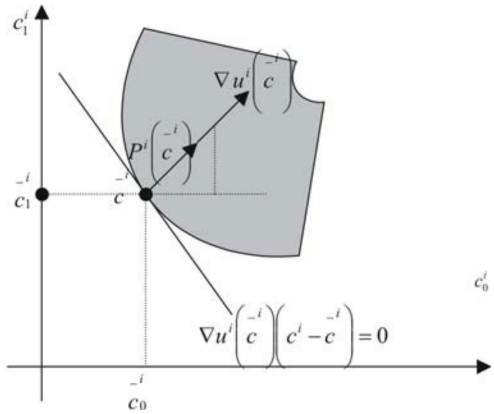
Pošto smo uveli pretpostavku o diferencijabilnosti funkcije korisnosti u (pretpostavke (P1) – (P5), i Teoremom 3.2 tvrdili i pokazali da je alokacija potrošnje $\left(\bar{c}\right)_{i\in N}$ je Pareto optimalna alokacija, možemo primijeniti stavove Posledice 2.1 da je $\left(\bar{c}\right)_{i\in N}$ Pareto optimalna alokacija ako i samo ako je svaki gradijent funkcije korisnosti proporcionalan vektoru cijena $\bar{P} \in R^n_{++}$, tj. $grad\, u^i\left(\bar{c}^i\right) = \alpha_0^i\left(\bar{c}^i\right)P^i\left(\bar{c}^i\right)$,

$$\text{odnosno } P^i\left(\bar{c}^i\right) = \frac{1}{\alpha_0^i\left(\bar{c}^i\right)}\, grad\, u^i\left(\bar{c}^i\right), \text{ gdje je } \alpha_0^i\left(\bar{c}^i\right) = \frac{\partial u^i\left(\bar{c}^i\right)}{\partial c_0^i}.$$

Prethodne stavove o odnosu gradijenta funkcije korisnosti i vektora cijena u tački ravnotežne alokacije prikazujemo slikom 3.2 koja slijedi.

---

[8] Videti Pareto optimalnu alokaciju Definicija 2.3.
[9] Skup $\boldsymbol{F}$ je skup ostvarivih alokacija dat definicijom 2.1a.



Slika 3.2

Komponenta $P_s^i\left(\bar{c}^i\right)=\dfrac{\partial u^i\left(\bar{c}^i\right)}{\partial c_s^i}\Big/\dfrac{\partial u\left(\bar{c}^i\right)}{\partial c_0^i}$, vektora $P^i\left(\bar{c}^i\right)$, predstavlja graničnu stopu supstitucije između potrošnje u stanju s ekonomskog sistema ($s=0,1,2,\ldots,S$) i potrošnje vremenskog perioda $t=0$. Dakle, granična stopa supstitucije pokazuje koji broj jedinica prihoda (dobra) u vremenskog perioda $t=0$ (u početnom vremenskom periodu) i-ti potrošač će biti spreman da ne utroši radi dobijanja dodatne jedinice prihoda u stanju s. Odnosno, granična stopa supstitucije predstavlja sadašnju vrijednost u vremenskom periodu $t=0$ jedne jedinice prihoda stanja s. Vektor $P^i\left(\bar{c}^i\right)$ u literaturi se često imenuje kao *vektor sadašnje vrijednosti* potrošača i pri ravnotežnoj alokaciji potrošnje $\bar{c}^i$. Dakle, da bi alokacija potrošnje $\left(\bar{c}^1,\bar{c}^2,\ \ldots.,\bar{c}^I\right)$ bila Pareto optimalna alokacija, neophodno je da su gradijenti funkcije korisnosti

$$\left(grad\,u^1\left(\bar{c}^1\right),grad\,u^2\left(\bar{c}^2\right),\ \ldots\ ,grad\,u^I\left(\bar{c}^I\right)\right)$$

potrošača istog smjera, ili ekvivalentno da bi alokacija potrošnje $\left(\bar{c}^1,\bar{c}^2,\ \ldots.,\bar{c}^I\right)$ bila Pareto optimalna alokacija neophodno je da su normalizovani gradijenti izjednačeni, tj.

$$\left(P^1\left(\bar{c}^1\right),P^2\left(\bar{c}^2\right),\ \ldots,P^I\left(\bar{c}^I\right)\right)=\bar{P}\,.$$

Jednakost normalizovanih gradijenata možemo takođe izraziti kao uslov da su granične stope supstitucije buduće postrošnje stanja $s=1,2,\ldots,S$ i potrošnje vremenskog perioda $t=0$ za sve potrošače izjednačene. Odstupanje od ovih uslova, odnosno mala preraspodjela roba između potrošača dovodi nekog od potrošača u povlašćen položaj a samim tim i do odsustva Pareto optimalnog stanja ekonomskog sistema.

Literatura

Arrow K. and Debreu G. (1954), "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", Econometrica, N° 22, 265-292.

Backović, Marko (1992), Analiza modela opšte ekonomske ravnoteže, *doktorska disertacija*, Ekonomski fakultet, Univerzitet u Beogradu.

Balasko Y. (1988), Fundations of the Theory of General Equilibrium, Academic Press.

Borglin A. and Tvede M. (2004), Economic Dynamics and General Equilibrium Time and Uncertainty, Springer Verlag.

Debreu G. (1972), „Smooth Preferncces", Econometrica, N° 40.

Duffie D. and Shafer W. (1985), „Equilibrium in Incomplete Markets I: Basic Model of Generic existence", Journal of Mathematical Economics, N° 14, 285-300.

Duffie, D. (1996), Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton, Princenton University Press.

Herings P. J. J. and Polemarchakis H. M. (2002), „Equilibrium and arbitrage in incomplete asset markets with fixed prices", Journal of Mathematical Economics, N° 37, 133 - 155.

Kubler F.(2001), „Computable general equilibrium with financial markets", Economic Theory, N° 18, 73–96, Springer-Verlag.

Mas-Colell, A. (1985), The Theory of General Economic Equilibrium, A Differentiable Approach, Cambridge, Cambridge University Press.

Magill M. and Quinzii M., (2002), „Theory of Incomplete Markets", Volume 1, The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England.

Werner J., (1985), „Equilibrium in Economies with Incomplete Financial Markets", Journal of Economic Theory, N° 36, 110-119.